GHEORGHE-ADALBERT SCHNEIDER

Teste de analiză matematică

pentru admiterea în învățământul superior

EDITURA "APOLLO"

CRAIOVA 1990

Scanned with OKEN Scanner

GHEORGHE-ADALBERT SCHNEIDER

Teste de analiză matematică

pentru admiterea în învățământul superior

EDITURA "APOLLO"

CRAIOVA 1990

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

	ENUNȚ	REZOLVARE
TESTUL 1	5	19
TESTUL 2	6	21
TESTUL 3	6	24
TESTUL 4	7	27
TESTUL 5	8	31
TESTUL 6	8	35
TESTUL 7	9	38
TESTUL 8	9	41
TESTUL 9	10	46
TESTUL 10	11	49
TESTUL 11	12	51
TESTUL 12	12	55
TESTUL 13	13	59
TESTUL 14	14	63
TESTUL 15	14	65
TESTUL 16	15	67
TESTUL 17	15	71
TESTUL 18	16	73
TESTUL 19	16	75
TESTUL 20	17	78
BIBLIOGRAFIE		80

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Prezenta lucrare a fost elaborată cu scopul de a veni în sprijinul elevilor din clasele a XI-a și a XII-a care doresc să aprofundeze analiza matematică, precum și în sprijinul candidaților la concursurile de admitere în învățământul superior.

Prin anumite probleme cu nivel mai ridicat de dificultate, lucrarea se adresează și elevilor care se pregătesc pentru concursurile de matematică.

Lucrarea prezintă 20 de teste, fiecare test fiind format din cîte cinci probleme avînd o concepție unitară.

Testele cuprind o mare diversitate de probleme, constituind un instrument de îmbogățire și aprofundare a cunoștințelor și tehnicilor de rezolvare a problemelor.

În prima parte a lucrării sînt prezentate enunțurile testelor, iar în partea a doua sînt prezentate soluțiile acestora.

Rezolvarea problemelor poate fi făcută și în altă ordine decît cea din enunțuri și apoi să se revină asupra problemelor ce nu au putut fi rezolvate inițial, urmînd ca la rezolvarea acestora să fie consultate și soluțiile problemelor.

Scanned with OKEN Scanner

TESTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

ENUNŢURI

TESTUL 1

1°. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale pozitive astfel încît:

$$(n+1)x_{n+1} - nx_n < 0.$$

Să se demonstreze că $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi să se calculeze limita.

2°. Fie $f: I \to R$, $f(x) = \arcsin |\ln x|$.

a) Să se determine I.

b) Să se determine mulţimea punctelor în care funcţia este continuă.

3°. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right)$$

4°. Fie funcţia $f: R \to R$ definită prin:

$$f(x) = \frac{|x| - 3}{1 + 2|x|}$$

a) Să se traseze graficul lui f.

b) Să se calculeze:

$$\int_0^3 f(x)\,dx.$$

Scanned with OKEN Scanner

5°. Să se calculeze :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 2ax + 1}, \quad a \in R$$

TESTUL 2

6°. Se dă șirul $(x_n)_{n \in N}$ definit prin relația de recurență :

$$x_{n+1} = x_n - x_n^2, \; x_0 = a \; (0 \leqslant a \leqslant 1).$$

a) Să se arate că $(x_n)_{n \in N}$ este convergent.
b) Să se calculeze limita acestui șir.
c) Să se calculeze :

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} x_k^2$$

7°. Fie $f : R \to R$, $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1 + x^2}$. Să se determine punctele în care funcția f nu este derivabilă și să se traseze graficul funcției.

8°. Să se determine valorile extreme ale funcției $f : R \to R$

$$f(x) = \sqrt{(x-2)^2 + 4}.$$

9°. Fie $f : (0, \infty) \to R$,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dacă } x \in [0, 1] \\ x - 1 & \text{dacă } x \in (1, \infty) \end{cases}$$

Să se calculeze :

$$\int_0^1 \frac{f(e^t)}{f(e^{-t})} dt.$$

10°. Să se calculeze :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx.$$

TESTUL 3

11°. Fie $a < b$ două numere reale. Se consideră șirul $(x_n)_{n \geqslant 1}$ pentru care :

a) $a < x_n < b \quad (\forall) \; n \in N^*$

b) $(b - x_n)(x_{n+1} - a) \geqslant \frac{(b-a)^2}{4} \quad (\forall) \; n \in N^*$

Să se arate că șirul este convergent și să se calculeze limita lui.

12°. Să se studieze continuitatea funcției $f: R \to R$:

$$f(x) = \begin{cases} (x + e^x)^{\frac{1}{x}} & \text{dacă } x < 0 \\ e^2 & \text{dacă } x = 0 \\ (\sin x + \cos x)^{\frac{m}{x}} & \text{dacă } x > 0 \end{cases} \quad \text{unde } m \in R$$

13°. Să se calculeze:

$$\lim_{x \to \pi/2} \frac{(1 - \sin x)(1 - \sin^2 x) \ldots (1 - \sin^n x)}{\cos^{2n} x}$$

14°. Să se reprezinte grafic funcția:

$$f(x) = x(1 + e^{-x}).$$

15°. Să se calculeze:

$$\int_0^2 \min\left(x, \frac{2}{1 + x^2}\right) dx.$$

TESTUL 4

16°. Să se calculeze:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^4}\right) \ldots \left(1 + \frac{1}{2^{2^n - 1}}\right).$$

17°. Să se studieze derivabilitatea funcției:

$f: R \to R$, $f(x) = x \mid x - a \mid + \mid x - b \mid$ unde $a, b \in R$.

18°. Să se arate că:

$$(2 - x)e^{x-1} \leqslant 1, \ (\forall)\ x \in R.$$

19°. Să se studieze și să se reprezinte grafic funcția:

$$f(x) = \frac{ax}{x^2 - k^2} \quad \text{unde } a \in R, \ k \in R_+^*.$$

20°. Se definesc elementele șirului de funcții:

$$(f_n)_{n \in N} \text{ astfel: } \begin{cases} f_1(x) = 1 \\ f_{n+1}(x) = \int_1^x f_n(t)\, dt, \quad (\forall)\ n \in N^* \end{cases}$$

Fie $a_n = f_{n+1}(2)$. Să se demonstreze că $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

TESTUL 5

21°. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 3^n + a^n}{3^n + 4^n}, \quad a \in R^*.$$

22°. Dacă $f: R \to R$ este o funcție continuă pe R și $f(ax) = f(x)$ $(\forall)$ $x \in R$, $a > 1$, atunci f este constantă pe R.

23° Să se studieze derivabilitatea funcției $f: R \to R$

$$f(x) = \min(x^4, x^5, x^6, x^7).$$

24° Se dă funcția $f(x) = \frac{ax}{x^2 + 3x + k^2}$ și se cere:

a) Să se determine a și k astfel încît punctele de extrem ale funcției să aibă ordonatele -1 și respectiv -2.
b) Să se studieze și să se reprezinte grafic funcția $f(x)$, a și k avînd valorile determinate la *a*).

25° Să se arate că:

$$\sqrt{3} \leqslant \int_2^5 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\, dx \leqslant \sqrt{6}.$$

TESTUL 6

26° Să se calculeze $\lim_{x\to\infty} n^k (\sqrt[4]{n+a} - \sqrt[4]{n+b})$, unde $a, b \in R$, $k \in N$.

27° Fie $f: [a, b] \to [a, b]$ o funcție continuă. Atunci f posedă cel puțin un punct fix.

28° Să se calculeze:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+25x)^{50} - (1+50x)^{25}}{x^2}.$$

29° Fie $f: R - \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\} \to R$, $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$. Se cere:

a) Să se studieze și să se reprezinte grafic funcția f.
b) Folosind graficul de la punctul *a*) să se studieze natura rădăcinilor ecuației:

$$x^3 - ax^2 + 3a = 0, \text{ unde } a \in R.$$

30° Să se calculeze $\int x \operatorname{tg}^2 x\, dx$. Ținînd seama că pe $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\operatorname{tg}^2 x \leqslant 1$, să se deducă inegalitatea $\ln 2 \geqslant \frac{\pi(4-\pi)}{8}$.

Scanned with OKEN Scanner

TESTUL 7

31° Să se calculeze:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln (x^2 + e^x)}{\ln (x^4 + e^x)}.$$

32° Fie $f: R \to (-\infty, 1)$, $g: R \to (1, \infty)$ două funcții continue pe R. Să se demonstreze că dacă există $x_1, x_2 \in R_+^*$, $x_1 < x_2$ astfel încît $f(x_1) = x_1$, $f(x_2) = x_2$, atunci există cel puțin un punct x_3, $x_3 \in (x_1, x_2)$ astfel încît $f(x_3)g(x_3) = x_3$.

33° Fie $f: R - \{-a\} \to R$, $f(x) = \dfrac{1}{x + a}$, $a > 0$ și șirul

$$(x_n)_{n\geq 0},\quad x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} f^{(k)}(a),\quad f^{(0)}(x) = f(x).$$

Să se studieze convergența șirului $(x_n)_{n\geq 0}$ și în caz de convergență să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

34° Se dă funcția $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{2}{x}\right)$. Se cere:

a) Să se studieze variația și să se traseze graficul funcției f.

b) Să se calculeze limita șirului cu termenul general:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

c) Să se calculeze:

$$\int_1^2 f(x)\,dx.$$

35° Să se determine primitivele funcției:

$$f: R \to R,\ f(x) = x - 2 + \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9}.$$

TESTUL 8

36° Fie $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ două șiruri de numere raționale astfel încît

$$(2 + \sqrt{5})^n = a_n + b_n\sqrt{5},\ (\forall)\ n \geq 1.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$.

37° Fie $f: (0, \infty) \to R$, $f(x) = \min(1 + 2\ln x, x^2)$. Să se calculeze $f^{(n)}(x)$, $n \in N^*$.

Scanned with OKEN Scanner

38° Se consideră funcția reală φ definită astfel:

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & \text{pentru } x = -1 \\ \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt & \text{pentru } x \in (-1,\ 1) \\ \frac{\pi}{4} & \text{pentru } x = 1 \end{cases}$$

Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției f.

39° Să se reprezinte grafic funcția:

$$f: R - \{-1,\ 0\} \to R$$

dată de

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + x^n(x^2+4)}{x(x^n+1)}.$$

40° Se consideră funcția $f: R \to R$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{dacă } |x| \leqslant 1 \\ 1 - |x| & \text{dacă } |x| > 1 \end{cases}$$

Să se arate că f admite primitive și să se determine aceste primitive.

TESTUL 9

41° Fie $a_1, a_2, a_3, a_4 \in R$. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}(a_1\sqrt{n+1} + a_2\sqrt{n+2} + a_3\sqrt{n+3} + a_4\sqrt{n+4}).$$

42° Să se calculeze punctele de extrem ale funcției:

$$f: (0,\ \infty) \to R,\ f(x) = x^{\frac{1}{x}}.$$

43° Se consideră funcția $f_p\ (0,\ \infty) \to R$ dată de:

$$f_p(x) = x - \frac{p}{x}$$

unde $p \in R$.
Să se studieze convexitatea funcției f_p pentru diferitele valori ale parametrului p.

44° Se dă $f_n(x) = \dfrac{1 + x + x^2 + \ldots + x^n}{1 + x^n}$

unde $x \in [0,\ \infty)$, $n \in N$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Să se traseze graficul funcției $f: [0, \infty) - \{1\} \to R$ definită prin

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

b) Să se calculeze:

$$\int_0^1 [f_2(x) - f_1(x)]\, dx.$$

45° Să se calculeze:

$$I = \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\, dx.$$

TESTUL 10

46° Fie $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$, $(z_n)_{n\geq 0}$ șiruri de numere reale pozitive astfel încît:

$$4x_{n+1} \leq y_n + z_n$$

$$4y_{n+1} \leq x_n + z_n$$

$$4z_{n+1} \leq x_n + y_n.$$

Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} x_n$, $\lim_{n\to\infty} y_n$, $\lim_{n\to\infty} z_n$.

47° Dacă $f: R \to R$ este o funcție derivabilă, iar $\lim_{x\to\infty} f(x) = a$ și există $\lim_{x\to\infty} xf'(x)$, atunci $\lim_{x\to\infty} xf'(x) = 0$.

48° Să se afle punctele de extrem ale funcției:

$$f: R \to R, \qquad f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2}.$$

49° Să se reprezinte grafic funcția $f: R - \{0, 2\} \to R$ definită prin:

$$f(x) = \frac{x}{|x-2|} + \frac{x-2}{|x|}.$$

50° Dacă $f: [0, 1] \to R$ este o funcție continuă și

$2\int_0^1 f(x)\, dx = 1$ atunci există $x_0 \in (0, 1)$ astfel încît

$$f(x_0) = x_0.$$

Scanned with OKEN Scanner

TESTUL 11

51° Să se studieze convergența șirului următor și în caz de convergență, să se calculeze limita:

$$a_0 = \frac{7}{2},\ a_{n+1} = a_n^2 - 6a_n + 12.$$

52° Să se calculeze pentru $n \in N^*$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^n - \sin^n x}{x^{n+2}}.$$

53° Fie $f: R \to R$, $f(x) = \max\{1, x^4\}$. Să se arate că f admite primitive și să se calculeze o primitivă a sa.

54° Se consideră funcția $f(x) = x^2 + \beta x - \ln(x + 1)$.

a) Să se găsească condițiile pe care trebuie să le satisfacă parametrii reali α și β pentru ca funcția să admită două extreme.

b) Pentru $\alpha = -1$ și $\beta = 1$, să se traseze graficul lui $f(x)$.

c) Să se calculeze aria porțiunii din plan cuprinsă între graficul funcției, axa Ox și dreapta de ecuație $x = -\frac{1}{2}$.

55° Să se determine primitivele funcției $f: R \to R$:

$$f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|}.$$

TESTUL 12

56° Să se calculeze:

$$\lim_{n \to \infty} (n^2 - \sqrt{n^4 - n^3 + 1}) \sin \frac{\pi}{n}.$$

57° Să se studieze continuitatea și derivabilitatea funcției $f: R \to R$

$$f(x) = \frac{x^2 + xe^{nx}}{1 + e^{nx}}.$$

58° Să se arate că:

$$x^{\frac{1}{x}} < 1 + \frac{3}{2\sqrt{x}}\ ,\ (\forall)\ x \in (1, e)$$

59° Să se reprezinte grafic familia de funcții $f: D \subset R \to R$,

$f(x, k) = x^2\sqrt{x + k}$, unde $x \in R_+$, $k \in R_-$ sau $k = 0$.

Scanned with OKEN Scanner

60. Se consideră funcția $f: R \to R$:

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \ln(1 - x) & \text{dacă } x < 0 \\ m & \text{dacă } x = 0 \\ 1 + e^{-2x} & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$$

a) Să se determine $m \in R$ astfel încît f să admită primitive pe R și să se calculeze aceste primitive.
b) Să se arate că orice primitivă a lui f este strict crescătoare.

TESTUL 13

61° Se consideră șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ și $x_{n+1} = \sqrt{x_n x_{n-1}}$. Să se arate că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent și să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

62° Să se calculeze:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}.$$

unde $m, n \in N$, $m, n \geq 2$ și $\alpha, \beta \in R$.

63° Fie $f: R \to R$

$$f(x) \begin{cases} 1 \text{ dacă } x \in Q \\ -1 \text{ dacă } x \in R - Q \end{cases}$$

Să se arate că:
a) f este periodică.
b) f nu este continuă.
c) f nu este derivabilă.

64° Să se reprezinte grafic funcția $f: (0, 1) \cup (1, \infty) \to R$

$$f(x) = \frac{e^x}{\ln x}.$$

65° Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n - 4 - 2a_n}{\pi}\right)^n$$

unde:

$$a_n = \int_1^n \frac{2x^3}{x^2 + 1}\, dx.$$

Scanned with OKEN Scanner

TESTUL 14

66° Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n}{(n+1)!}.$$

67° Dacă $f, g : [0, 1] \to R$ sînt continue pe $[0, 1]$, derivabile pe $(0, 1)$, $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$, $(\forall)\ x \in [0, 1]$ și $f(0) = f(1) = 0$ rezultă că există $c_n \in (0, 1)$ astfel încît:

$$\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = n\frac{f(c_n)}{g(c_n)}.$$

68° Fie $f : R - \{-1, 1\} \to R$,

$$f(x) = \frac{x^5}{x^2 - 1}.$$

Să se calculeze $f^{(n)}(x)$, unde $f^{(n)}(x)$ reprezintă derivata de ordin n a funcției f.

69° Să se reprezinte grafic funcția:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x}}.$$

70. Să se calculeze:

$$\int_1^3 \frac{dx}{|x - a| + 1}.$$

TESTUL 15

71° Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{4}{3^2}\right)\left(1 - \frac{4}{4^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{4}{n^2}\right).$$

72° Să se studieze continuitatea funcției:

$$f : R \to R,\ f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & \text{dacă } x \in Q \\ x^3 & \text{dacă } x \in R - Q. \end{cases}$$

73° Fie P un polinom de gradul n cu coeficienți reali. Atunci P se divide cu derivata sa P' dacă și numai dacă $P(x) = \lambda(x - a)^n$, $(\forall)\ x \in R$ unde $a \in R$ și $\lambda \in R^*$.

74° Să se traseze graficul funcției $f : R \to R$ definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{dacă } x = 0. \end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

75° Să se arate că funcția $f:[0,\ 1]\to R$

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{dacă } x\in Q\cap[0,\ 1]\\ 2 & \text{dacă } x\in[0,\ 1]-Q.\end{cases}$$

nu este integrabilă Riemann pe $[0,\ 1]$.

TESTUL 16

76° Fie $x_n\in(0,\ 1)$ astfel încît $x_{n+1}(1-x_n)>\frac{1}{4}$.

Să se arate că șirul $(x_n)_{n\geqslant 0}$ este convergent și să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

77° Să se studieze continuitatea funcției:

$$f:R\to R,\ f(x)=\max\{|\,x-|\,x-1\,|\,|,\ x\}.$$

78° Se dă funcția $f:R-\{-1,\ 0\}\to R$, definită prin:

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}.$$

a) Să se studieze variația lui f și să se traseze graficul.

b) Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}[f(1)+f(2)+\ \ldots\ +f(n)].$$

79° Folosind șirul lui Rolle să se discute natura rădăcinilor ecuației:

$$2x^3-3mx^2+m=0.$$

80° Să se arate că $(\forall)\ n\geqslant 1,\ p\geqslant 1,\ n,\ p\in N$:

$$\int_0^1 x^n(1-x)^p\,dx=\int_0^1 x^p(1-x)^n\,dx.$$

TESTUL 17

81° Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^2 2x+\ \ldots\ +\operatorname{tg}^2 nx))^{1/n^3x^3}$$

82° Să se arate că, curbele $f(x)=\sin^n x$, $(n\geqslant 2)$ au cîte un punct de inflexiune $N_n(x_n,\ y_n)$ în intervalul $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ și $\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

83° Să se reprezinte grafic funcția $f:R\to R$, $f(x)=(1+x)e^{-|x-1|}$ și să se calculeze aria mulțimii plane cuprinsă între graficul funcției f, axele de coordonate și dreapta $x=2$.

Scanned with OKEN Scanner

84° Să se arate că funcţia $f: R \to R$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{dacă } x \in Q \\ 2^x & \text{dacă } x \in R - Q. \end{cases}$$

nu admite primitive.

85° Să se calculeze:

$$\int_{-2}^{2} |x - |x - 2|| \, dx.$$

TESTUL 18

86° Fie şirul $(a_n)_{n \geq 1}$, cu $a_n = \lim_{x \to 0} (1 - x \sin nx)^{1/x^2}$.

Să se studieze convergenţa şirului $(b_n)_{n \geq 1}$, $b_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ şi în caz de convergenţă să i se calculeze limita.

87° Să se determine numerele reale a, b, c, astfel încît limita:

$$\lim_{n \to \infty} n(an + \sqrt{2 + bn + cn^2})$$

să existe şi să fie egală cu 1.

88° Să se calculeze $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n}$, unde:

$$a_n = \int_1^n \frac{x - 1}{x + 1} dx \quad (n \geq 1 \text{ întreg}).$$

89° Să se calculeze:

$$\int_1^{n+1} \ln[x] \, dx.$$

90° Să se calculeze:

$$\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{a + b \sin 2x}}.$$

TESTUL 19

91° Să se calculeze:

$$I = \lim_{x \to 0} \lim_{n \to \infty} \left(\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \ldots \cos \frac{x}{2^n} \right)^n.$$

Scanned with OKEN Scanner

92° Se consideră funcția $f: R \to R$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} \ln \dfrac{|1 - x^2|}{1 + x^2} & \text{dacă } x \in \{-1, 0, 1\} \\ -2 & \text{dacă } x \in \{-1, 0, 1\} \end{cases}$$

Să se studieze continuitatea lui f și să se calculeze:

$$I = \int_{\sqrt{3}}^{2} f(x)\, dx.$$

93° Fie $f: R \to R$ o funcție cu proprietatea că $(x + 1)f(x)$ și $xf(x + 1)$ admit primitive pe R. Să se demonstreze că f admite primitive pe R.

94° Să se arate că:

$$\int_0^1 e^{x^2}\, dx + \int_0^1 e^{1-x^2}\, dx \leqslant 1 + e.$$

95° Să se stabilească o formulă de recurență pentru:

$$I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{x^2 + 1}}\, dx.$$

TESTUL 20

96° Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geqslant 1}$, $x_n = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{x^k}$ este convergent.

97° Fie $f: R \to R$ o funcție, $g(x) = [x]f(x)$ $(\forall)$ $x \in R$. Să se arate că dacă f este continuă într-un punct $n \in Z$, atunci g este continuă în n dacă și numai dacă $f(n) = 0$.

98° Să se calculeze:

$$\int_1^2 x \arccos \frac{1}{x}\, dx.$$

99° Să se arate că $e^x \geqslant 1 + x$ pentru orice $x \in R$ și să se verifice inegalitățile:

$$\frac{1}{e} \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\, dx \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

100° Fie $f: [-1, 1] \to R$, $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } x \in [0, 1] \\ 2 \text{ dacă } x \in (1, 2]. \end{cases}$

Să se arate că f este integrabilă pe $[-1, 1]$ și f nu admite primitive pe $[-1, 1]$.

Scanned with OKEN Scanner

TESTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

REZOLVĂRI

TESTUL 1

1° Relația $(n+1)x_{n+1} - nx_n < 0$ este echivalentă cu $\frac{x_{n+1}}{x_n} < \frac{n}{n+1} < 1$ adică șirul este descrescător. Fiind descrescător șirul este mărginit superior de primul termen al său. Deci $x_n \in (0, x_1)$ $(\forall)n \geqslant 1$ adică șirul este mărginit. Fiind descrescător și mărginit șirul este convergent.

$$n = 1 \Rightarrow 2x_2 - x_1 < 0$$
$$n = 2 \Rightarrow x_3 - 2x_2 < 0$$
$$n = 3 \Rightarrow 4x_4 - 3x_3 < 0$$
$$\text{---------------------------}$$
$$n = n-1 \Rightarrow nx_n - (n-1)x_{n-1} < 0$$
$$n = n \Rightarrow (n+1)x_n - nx_n < 0$$

Prin adunarea membru cu membru a celor n relații obținem

$$(n+1)x_{n+1} - x_1 < 0 \Rightarrow 0 < x_{n+1} < \frac{x_1}{n+1} \Rightarrow 0 \leqslant \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{x_1}{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant \lim_{n\to\infty} x_n \leqslant 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

Scanned with OKEN Scanner

2° *a*) Domeniul de definiție I se determină din condițiile :

$$\begin{cases} |\ln x| \leqslant 1 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 \leqslant \ln x \leqslant 1 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [1/e,\ e] \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (1/e,\ e]$$

b) Deoarece : $x \in (0,1] \Rightarrow \ln x \leqslant 0 \Rightarrow |\ln x| = -\ln x$

și $x \in (1,\ e] \Rightarrow \ln x > 0 \Rightarrow |\ln x| = \ln x$

atunci

$$f(x) = \begin{cases} \arcsin(-\ln x) & \text{dacă } x \in (1/e,\ 1] \\ \arcsin(\ln x) & \text{dacă } x \in (1,\ e] \end{cases}$$

Evident funcția este continuă în 1 și deci continuă pe I.

3° $\lim\limits_{x\to\infty} x^2(e^{1/x} - e^{1/(x+1)}) = \lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^{1/(x+1)}\,(e^{1/x(x+1)} - 1) =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x(x+1)} \cdot \lim_{x\to\infty} e^{1/(x+1)} \lim_{x\to\infty} \frac{e^{1/x(x+1)} - 1}{1/x(x+1)} = 1.1.\ln e = 1$$

4° a) Evident funcția f este pară și este suficient de trasat graficul pentru $x \geqslant 0$ adică pentru $f(x) = \dfrac{x-3}{2x+1}$ și apoi pentru $x < 0$ vom trasa simetricul acestuia față de axa oy.

Asimptotele : $y = \dfrac{1}{2}$

Derivata : $f'(x) = \dfrac{7}{(2x+1)^2} < 0$

Graficul este prezentat în fig. 1

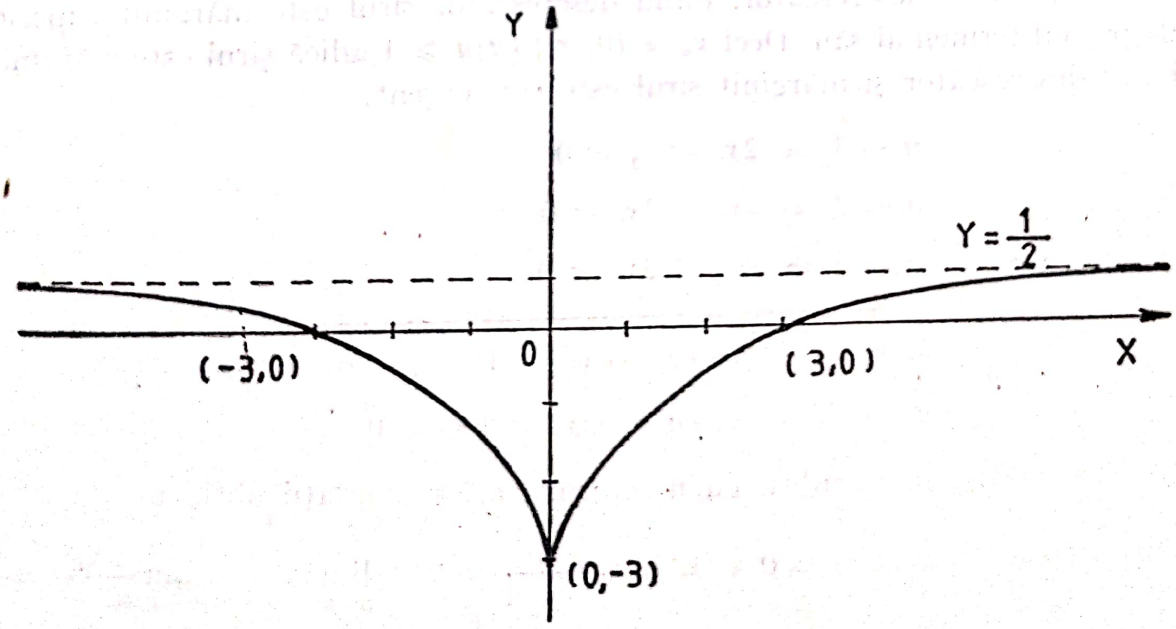


fig. 1

$$b)\ \int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 \frac{x-3}{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{2x-6}{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^3 \frac{2x+1-7}{2x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^3 \left(1 - \frac{7}{2x+1}\right) dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{7}{2}\ln(2x+1)\right]\Big|_0^3 =$$

$$= \frac{6 - 7\ln 7}{4}$$

$$5^\circ\ I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+2ax+1} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+a)^2+1-a^2}$$

$a)$ dacă $a \in (-1,\ 1) \Rightarrow 1 - a^2 > 0 \Rightarrow I = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \operatorname{arctg} \frac{x+a}{\sqrt{1-a^2}}\Big|_0^1 =$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\left(\operatorname{arctg}\frac{a+1}{\sqrt{1-a^2}} - \operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\right)$$

$b)$ dacă $a = \pm 1 \Rightarrow I = \int_0^1 \frac{dx}{(x\pm 1)^2} = -\frac{1}{x\pm 1}\Big|_0^1$

$$a = 1 \quad \Rightarrow I = -\frac{1}{x+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$a = -1 \Rightarrow I = -\frac{1}{x-1}\Big|_0^1 = \lim_{\substack{\varepsilon\to 1\\ \varepsilon<1}} \frac{1}{1-x}\Big|_0^\varepsilon = +\infty$$

$c)$ dacă $a \in (-\infty,\ -1) \cup (1,\ \infty) \Rightarrow 1 - a\ < 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{dx}{(x+a)^2 - (a^2-1)} = \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}} \ln\left|\frac{x+a-\sqrt{a^2-1}}{x+a+\sqrt{a^2-1}}\right|\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a^2-1}}\left(\ln\frac{1+a-\sqrt{a^2-1}}{1+a+\sqrt{a^2-1}} - \ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\right|\right).$$

TESTUL 2

6° $a)$ $x_{n+1} = x_n - x_n^2 \Rightarrow x_n - x_{n+1} = x_n^2 \geqslant 0 \Rightarrow x_n \geqslant x_{n+1}$, deci șirul este descrescător și implicit mărginit superior de primul termen al său. Deci $x_n \in [0,\ x_0]\ (\forall)n \geqslant 0$, adică șirul este mărginit și deci convergent.

Scanned with OKEN Scanner

b) Fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Trecînd la limită în relația de recurență obținem ecuația

$$l = l - l \Rightarrow l = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

c) $x_{k+1} = x_k - x_k^2 \Rightarrow x_k^2 = x_k - x_{k+1}$

$$\sum_{k=0}^{n} x_k^2 = \sum_{k=0}^{n} (x_k - x_{k+1}) = (x_0 - x_1) + (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) + \ldots +$$

$$+ (x_n - x_{n+1}) = x_0 - x_{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k^2 = \lim_{n\to\infty} (x_0 - x_{n+1}) = x_0 - \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x_0 - 0 = x_0$$

7° Deoarece $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ rezultă că funcția $\arcsin(u)$ nu este derivabilă dacă $1 - u^2 = 0$.

În cazul nostru $u = \dfrac{2x}{1+x^2}$ și deci $1 - u^2 = 0 \Rightarrow 1 - \dfrac{2x}{1+x^2} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \pm 1$$

Deci punctele în care funcția f nu este derivabilă sînt $x = \pm 1$.

Funcția f este impară și deci graficul va fi simetric față de origine. Din acest motiv funcția va fi studiată numai pe $[0, \infty)$.

Asimptote : $y = 0$

Derivata întîi : $f'(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)\,|\,1-x^2\,|} = \begin{cases} \dfrac{2}{1+x^2} & \text{dacă } x \in [0, 1) \\ \dfrac{-2}{1+x^2} & \text{dacă } x \in (1, \infty) \end{cases}$

Derivata a doua : $f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-4x}{(1+x^2)^2} & \text{dacă } x \in [0, 1) \\ \dfrac{4x}{(1+x^2)^2} & \text{dacă } x \in (1, \infty) \end{cases}$

Tabloul final :

x	0			1									$+\infty$
$f'(x)$	+	+	+	¦	−	−	−	−	−	−	−	−	−
$f(x)$	0	↗		$\pi/2$	↘								
$f''(x)$	0	−		−1	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Graficul funcției este prezentat în fig. 2.

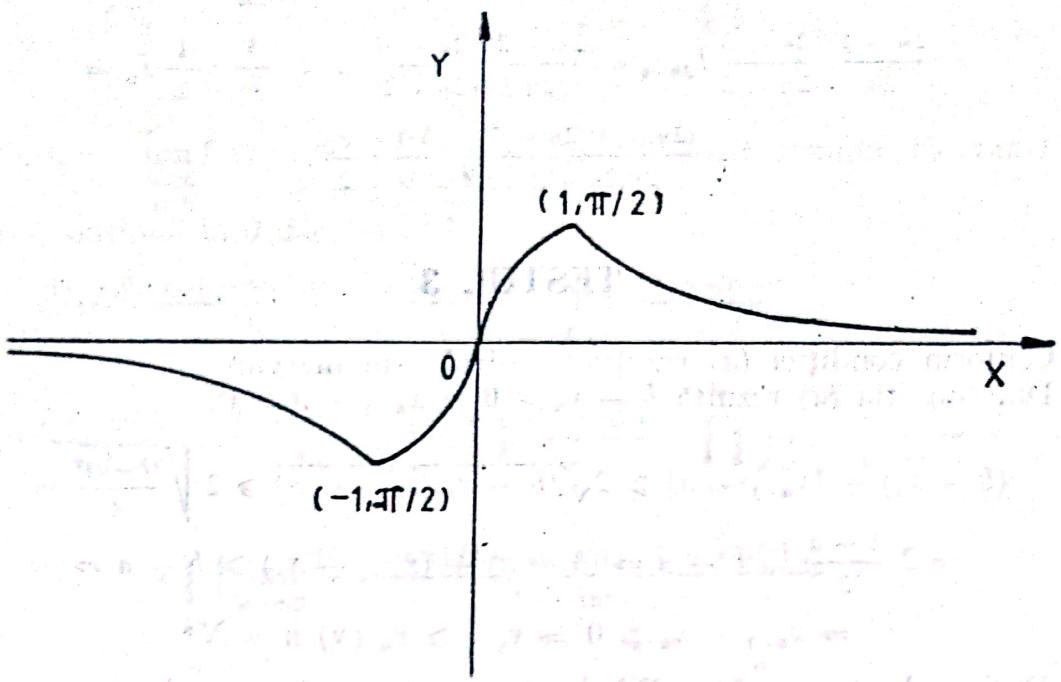


fig. 2

8° Punctele de extrem ale unei funcții se găsesc printre zerourile derivatei.

$$f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{(x-2)^2+4}}.$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	

Funcția f are deci un punct de minim egal cu 2.

9° Dacă $t \in (0,\ 1) \Rightarrow e^t \in (1,\ e) \Rightarrow f(e^t) = e^t - 1$

Dacă $t \in (0,\ 1) \Rightarrow e^{-t} \in \left(\frac{1}{e},\ 1\right) \Rightarrow f(e^{-t}) = e^{-t}$

$$\int_0^1 \frac{f(e^t)}{f(e^{-t})}\,dt = \int_0^1 \frac{e^t-1}{e^{-t}}\,dt = \int_0^1 (e^{2t} - e^t)\,dt = \left(\frac{1}{2}e^{2t} - e^t\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - e + \frac{1}{2}.$$

10° $I_{2n} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}x\,dx = -\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1}x \cdot (\cos x)'\,dx = -\sin^{2n-1}x\cos x\,\Big|_0^{\pi/2} +$

$$+ \int_0^{\pi/2} (2n-1)\sin^{2n-2}x\cos^2 x\,dx = (2n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2}x\,dx -$$

$$-(2n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}x\,dx = (2n-1)I_{2n-2} - (2n-1)I_{2n}$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci $I_{2n} = (2n-1)I_{2n-2} - (2n-1)I_{2n} \Rightarrow I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} =$

$$= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} I_{2n-4} = \frac{2n-2}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0 =$$

$$= \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3 \cdot 1}{2n(2n-2)\ldots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

TESTUL 3

11° Conform condiției (a) rezultă că șirul este mărginit.
Din condiția (a) rezultă $b - x_n > 0$ și $x_{n+1} - a > 0$.

$$(b - x_n) + (x_{n+1} - a) \geqslant 2\sqrt{(b - x_n)(x_{n+1} - a)} \geqslant 2\sqrt{\frac{(b-a)^2}{4}} =$$

$$= 2\,\frac{b-a}{2} = b - a \Rightarrow (b - a) + (x_{n+1} - x_n) \geqslant b - a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{n+1} - x_n \geqslant 0 \Rightarrow x_{n+1} \geqslant x_n \ (\forall)\ n \in \mathcal{N}^*$$

Deci șirul este crescător. Fiind mărginit și crescător, șirul este convergent și există $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Trecînd la limită în inegalitatea de la (b) rezultă:

$$(b - l)(l - a) \geqslant \frac{(b-a)^2}{4} \Rightarrow 4l^2 - 4(a + b)l + (b + a)^2 \leqslant 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [2l - (a + b)]^2 \leqslant 0 \quad | \qquad (1)$$

$$\text{Însă } [2l - (a + b)]^2 \geqslant 0 \quad | \qquad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă $[2l - (a + b)]^2 = 0 \Rightarrow l = \frac{a+b}{2}$

12° Dacă $x < 0$ atunci $f(x) = (x + e^x)^{1/x}$ și este continuă fiind compunere de funcții continue.
Dacă $x > 0$ atunci $f(x) = (\sin x + \cos x)^{m/x}$ și este continuă fiind compunere de funcții continue.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (x + e^x)^{1/x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (1 + x + e^x - 1)^{1/x} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \{[1 + (x + e^x - 1)]^{1/(x+e^x-1)}\}^{(x+e^x-1)/x} =$$

$$= e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{x+e^x-1}{x}} = e^{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{x}{x} + \lim\limits_{\substack{e^x\to 0\\ x<0}} \frac{e^x-1}{x}} = e^{1+\ln e} = e^2$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\sin x + \cos x)^{m/x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1 + \sin x + \cos x - 1)^{m/x} =$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \{[1 + (\sin x + \cos x - 1)]^{1/(\sin x+\cos x-1)}\}^{m/(\sin x+\cos x-1)x} =$$

Scanned with OKEN Scanner

$$= e^{m \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{2\sin x/2\cos x/2 - 2\sin^2 x/2}{x}} = e^{2m \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sin x/2}{x} \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (\cos x/2 - \sin x/2)} =$$

$$= e^{2m\, 1/2} = e^m.$$

Deoarece $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = e^2$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = e^m$, $f(0) = e^2$ rezultă că funcția f este continuă în 0 dacă $m = 2$.

13° $$\lim_{x\to\pi/2} \frac{(1-\sin x)(1-\sin^2 x)\ldots(1-\sin^n x)}{\cos^{2n} x} = \lim_{x\to\pi/2} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} \cdot$$

$$\cdot \frac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \ldots \cdot \frac{1-\sin^n x}{\cos^2 x} = \lim_{x\to\pi/2} \prod_{k=1}^{n} \frac{1-\sin^k x}{\cos^2 x} = \prod_{k=1}^{n} \lim_{x\to\pi/2} \frac{1-\sin^k x}{\cos^2 x} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \lim_{x\to\pi/2} \frac{(1-\sin x)(1+\sin x+\ldots+\sin^{k-1} x)}{1-\sin^2 x} =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \lim_{x\to\pi/2} \frac{1+\sin x+\ldots+\sin^{k-1} x}{1+\sin x} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2} \cdot \ldots \frac{n}{2} = \frac{n!}{2^n}.$$

14° Domeniul de definiție al funcției este R.
Asimptote : $y = x$ la ramura spre $+\infty$.
Derivata întîi : $f'(x) = e^{-x}(e^x + 1 - x)$.
Pentru a studia semnul lui $f(x)$ vom nota

$$g(x) = e^x + 1 - x$$

$$g'(x) = e^x - 1$$

x	$-\infty$					0					$+\infty$
$g'(x) = e^x - 1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$g(x)$	$\searrow$					2			$\nearrow$		

Deoarece $g(x)$ are valoarea minimă 2 rezultă că $g(x) \geqslant 2 > 0$
Deci $f'(x) = e^{-x}(e^x + 1 - x) > 0$ $(\forall)$ $x \in R$
Derivata a doua : $f''(x) = e^{-x}(x - 2)$
Tabloul final :

x	$-\infty$					2					$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$		$\nearrow$			$2 + 2/e^2$			$\nearrow$		$+\infty$
$f''(x)$			$-$			0			$+$		

Scanned with OKEN Scanner

Graficul funcției este prezentat în fig. 3.

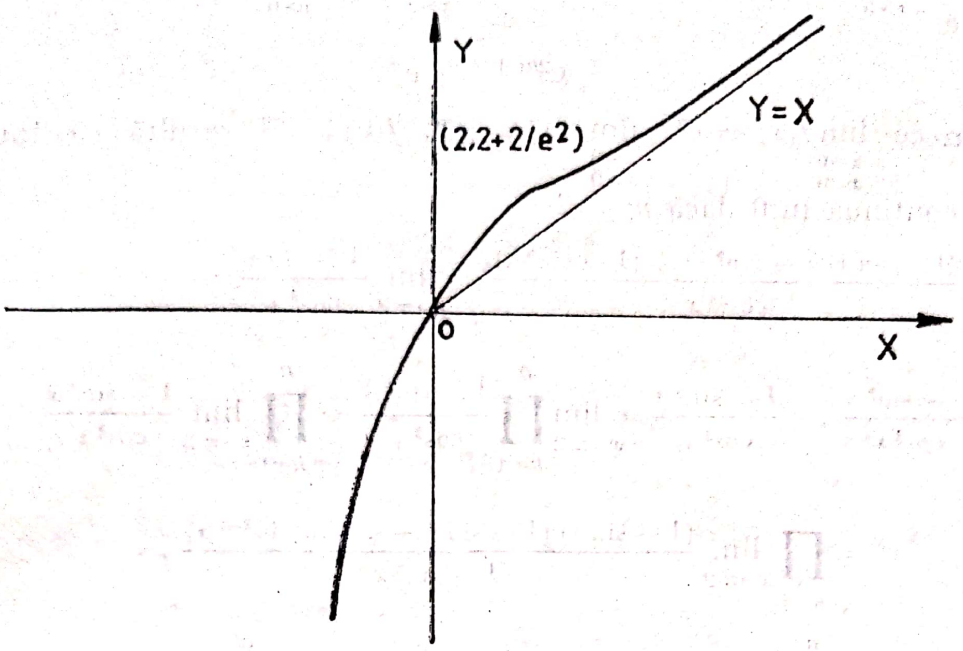


fig. 3

15° Pentru a calcula $\min\left(x, \frac{2}{1+x}\right)$ vom considera funcția

$$f(x) = x - \frac{2}{1+x^2} = \frac{(x^3+x-2)}{1+x^2} = \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{1+x^2}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
x^2+x+2		$+$		$+$	
$1+x^2$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Dacă $x \in [0, 1]$ rezultă:

$$f(x) \leqslant 0 \Rightarrow x - \frac{2}{1+x^2} \leqslant 0 \Rightarrow x \leqslant \frac{2}{1+x^2} \Rightarrow \min\left(x, \frac{2}{1+x^2}\right) = x.$$

Dacă $x \in (1, 2]$ rezultă:

$$f(x) > 0 \Rightarrow x - \frac{2}{1+x^2} > 0 \Rightarrow x > \frac{2}{1+x^2} \Rightarrow \min\left(x, \frac{2}{1+x^2}\right) = \frac{2}{1+x^2}.$$

$$\int_{0_1}^{2} \min\left(x, \frac{2}{1+x^2}\right) dx = \int_{0}^{1} \min\left(x, \frac{2}{1+x^2}\right) dx + \int_{1}^{2} \min\left(x, \frac{2}{1+x^2}\right) dx = \int_{0}^{1} x\, dx +$$

$$+\int_1^2 \frac{2}{1+x^2}\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + 2\operatorname{arctg} x\Big|_1^2 = \frac{1}{2} + 2\left(\operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{2} +$$

$$+ 2\operatorname{arctg} 2.$$

TESTUL 4

16° Notăm $L_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n-1}}\right)$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)L_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n-1}}\right) =$$

$$= \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n-1}}\right) =$$

$$= \left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^{2^n-1}}\right) = \ldots = 1-\frac{1}{2^{2^n}}.$$

Deci:

$$\frac{1}{2}L_n = 1-\frac{1}{2^{2^n}} \Rightarrow L_n = 2-\frac{2}{2^{2^n}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} L_n = 2.$$

17° a) Dacă $a < b$ atunci

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+(a-1)x+b & \text{dacă } x \in (-\infty, a) \\ b-a & \text{dacă } x = a \\ x^2-(a+1)x+b & \text{dacă } x \in (a, b) \\ b(b-a) & \text{dacă } x = b \\ x^2+(1-a)x-b & \text{dacă } x \in (b, +\infty). \end{cases}$$

Dacă $x \in (-\infty, a)$ atunci $f(x) = -x^2+(a-1)x+b$ și este derivabilă fiind funcție polinom.

Dacă $x \in (a, b)$ atunci $f(x) = x^2-(a+1)x+b$ și este derivabilă fiind funcție polinom.

Dacă $x \in (b, \infty)$ atunci $f(x) = x^2+(1-a)x-b$ și este derivabilă fiind funcție polinom.

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -a-1$$

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = a-1.$$

f este derivabilă în a dacă $-a-1 = a-1 \Leftrightarrow a = 0$

Scanned with OKEN Scanner

$$\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = 2b-a-1$$

$$\lim_{\substack{x\to b\\ x>b}} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = 2b-a+1.$$

f este derivabilă în b dacă $2b-a-1 = 2b-a+1 \Leftrightarrow -1 = 1$ fals

Deci f este derivabilă pe $|R - \{b\}$ dacă $a = 0$.

b) Dacă $a = b$ atunci funcția devine

$$f(x) = (x+1)\,|x-a| = \begin{cases} -x^2+(a-1)x+a & \text{dacă } x \in (-\infty, a) \\ 0 & \text{dacă } x = a \\ x^2+(1-a)x-a & \text{dacă } x \in (a+\infty). \end{cases}$$

Dacă $x \in (-\infty, a)$ atunci $f(x) = -x^2+(a-1)x+a$ și este derivabilă fiind funcție polinom.
Dacă $x \in (a, \infty)$ atunci $f(x) = x^2+(1-a)x-a$ și este derivabilă fiind funcție polinom.

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -a-1$$

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = a+1.$$

f este derivabilă în a dacă $-a-1 = a+1 \Leftrightarrow a = -1$

c) Dacă $a > b$ atunci

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+(a-1)x+b & \text{dacă } x \in (-\infty, b) \\ b(a-b) & \text{dacă } x = b \\ -x^2+(a+1)x-b & \text{dacă } x \in (b, a) \\ a-b & \text{dacă } x = a \\ x^2+(1-a)x-b & \text{dacă } x \in (a, +\infty). \end{cases}$$

Dacă $x \in (-\infty, b)$ atunci $f(x) = -x^2+(a-1)x+b$ și este derivabilă fiind funcție polinom.

Dacă $x \in (b, a)$ atunci $f(x) = -x^2+(a+1)x-b$ și este derivabilă fiind funcție polinom.

Dacă $x \in (a, +\infty)$ atunci $f(x) = x^2+(1-a)x-b$ și este derivabilă fiind funcție polinom.

$$\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = -2b+a-1$$

$$\lim_{\substack{x\to b\\ x>b}} \frac{f(x)-f(b)}{x-b} = -2b+a+1.$$

Scanned with OKEN Scanner

f este derivabilă în b dacă $-2b + a - 1 = -2b + a + 1 \Leftrightarrow -1 = 1$ fals.

Deci f nu este derivabilă în b.

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -a + 1$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = a + 1.$$

f este derivabilă în a dacă $-a + 1 = a + 1 \Leftrightarrow a = 1$

18° Considerăm funcția $f: R \to R$

$$f(x) = 1 - (2 - x)e^{x-1} = 1 + (x - 2)e^{x-1}$$

$$f'(x) = (x - 1)e^{x-1}.$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Valoarea minimă a funcției fiind 0 rezultă $f(x) \geqslant 0$ $(\forall)$ $x \in R \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - (2 - x)e^{x-1} \geqslant 0$ $(\forall)$ $x \in R \Rightarrow (2 - x)e^{x-1} \leqslant 1$ $(\forall)\, x \in R$.

19° a) Dacă $a > 0$ avem:

Domeniul de definiție $R - \{-k, k\}$

Asimptote: $y = 0$, $x = -k$, $x = k$

Derivata întîi: $f'(x) = \dfrac{-a(x^2 + k^2)}{(x^2 - k^2)^2}$

Tabloul final:

x	$-\infty$		$-k$		0		k		$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$\|$	$-$		$-$	$\|$	$-$	
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$		$\|$	$+\infty \searrow 0$		$\searrow -\infty$	$\|$	$+\infty \searrow 0$	

Scanned with OKEN Scanner

Graficul este prezentat în fig. 4.

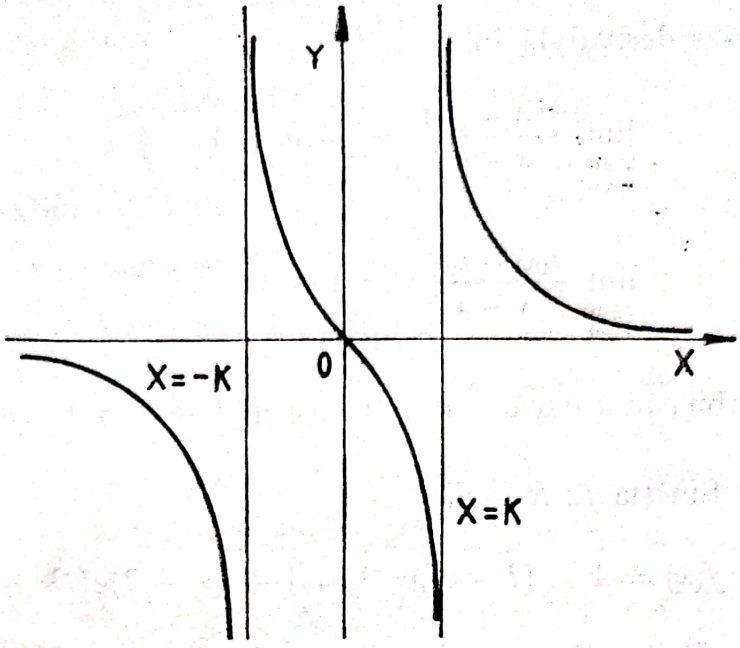


Fig. 4

b) Dacă $a = 0$ atunci $f(x) = 0$ și graficul este axa Ox.

c) Dacă $a < 0$ avem:

Tabloul final

x	$-\infty$		$-k$		0		k		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$\|$	$+$	$+$		$\|$	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty \mid -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty \mid -\infty$	$\nearrow$	0

Graficul este prezentat în fig. 5

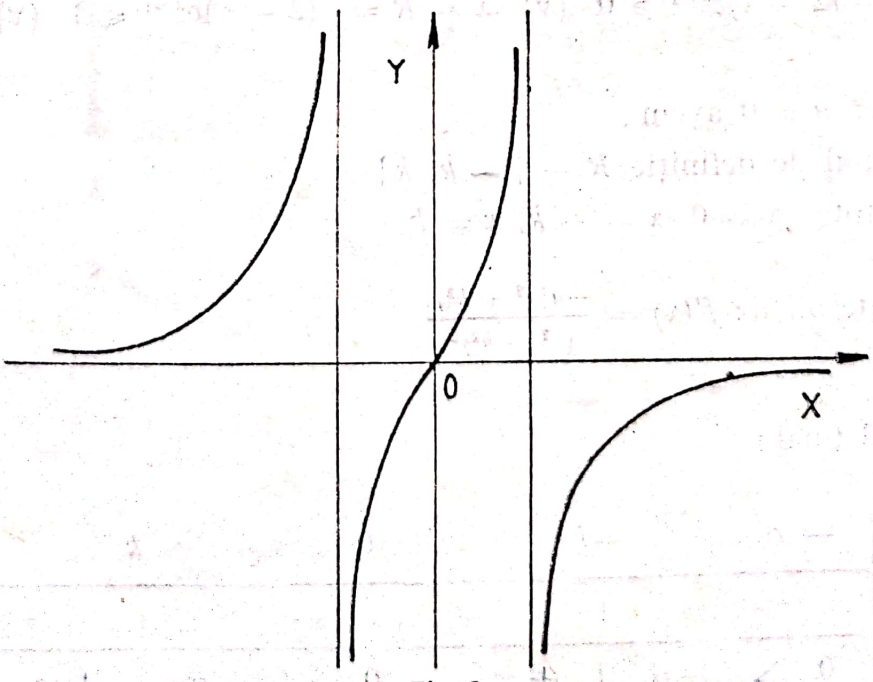


Fig. 5

20° $f_2(x) = \int_1^x f_1(t)\,dt = \int_1^x 1\,dt = t\Big|_1^x = x - 1$

$$f_3(x) = \int_1^x f_2(t)\,dt = \int_1^x (t-1)\,dt = \frac{(t-1)^2}{2}\Big|_1^x = \frac{(x-1)^2}{2}$$

$$f_4(x) = \int_1^x f_3(t)\,dt = \int_1^x \frac{(t-1)^2}{2}\,dt = \frac{(t-1)^3}{2\cdot 3}\Big|_1^x = \frac{(x-1)^3}{3!}$$

Prin inducție vom demonstra că:

$$f_{n+1}(x) = \frac{(x-1)^n}{n!}.$$

Presupunem deci că $f_n(x) = \dfrac{(x-1)^{n-1}}{(n-1)!}$

$$f_{n+1}(x) = \int_1^x \frac{(t-1)^{n-1}}{(n-1)!}\,dt = \frac{(t-1)^n}{(n-1)!n}\Big|_1^x = \frac{(x-1)^n}{n!}$$

$$a_n = f_{n+1}(2) = \frac{(2-1)^n}{n!} = \frac{1}{n!}.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

TESTUL 5

21° a) Dacă $a < 4$ atunci:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + 3^n + a^n}{3^n + 4^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\max\{3,a\}\left[\left(\frac{2}{\max\{3,a\}}\right)^n + \left(\frac{3}{\max\{3,a\}}\right)^n + \left(\frac{a}{\max\{3,a\}}\right)^n\right]}{4^n\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\max\{3,a\}}{4}\right)^n \cdot \frac{\left(\frac{2}{\max\{3,a\}}\right) + \left(\frac{3}{\max\{3,a\}}\right)^n + \left(\frac{a}{\max\{3,a\}}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1} = 0.$$

deoarece $\left(\dfrac{\max\{3,a\}}{4}\right)^n \to 0$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Dacă $a = 4$ atunci

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n+a^n}{3^n+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n+4^n}{3^n+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\left[\left(\frac{2}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n+1\right]}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{4}\right)^n\cdot\frac{\left(\frac{2}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{4}\right)^n+\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}=1.$$

c) Dacă $a > 4$ atunci:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n+a^n}{3^n+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n\left[\left(\frac{2}{a}\right)^n+\left(\frac{3}{a}\right)^n+1\right]}{4^n\left[\left(\frac{3}{4}\right)^n+1\right]}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{4}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{a}\right)^n+\left(\frac{3}{a}\right)^n+1}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}=+\infty.$$

22° $f(x) = f(ax)$

$f(ax) = f(a\cdot ax) = f(a^2x)$

$f(a^{n-1}x) = f(a\cdot a^{n-1}x) = f(a^nx)$

Folosind acest șir de egalități rezultă că

$f(x) = f(a^nx)$ $(\forall)$ $x \in R$

Aplicînd egalitatea pentru $x = \frac{x}{a^n}$ obținem:

$$f\left(\frac{x}{a^n}\right)=f\left(a^n\frac{x}{a^n}\right)\Rightarrow f\left(\frac{x}{a^n}\right)=f(x)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{x}{a^n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}f(x)\Rightarrow f\left(\lim_{n\to\infty}\frac{x}{a^n}\right)=f(x)\Rightarrow f(0)=f(x)\ (\forall)\ x\in R.$$

Cum $f(0)$ este constantă rezultă că f este constantă pe R.

23°

$$f(x)=\begin{cases}x^7 \text{ dacă } x\in(-\infty,-1]\\ x^5 \text{ dacă } x\in(-1,0]\\ x^7 \text{ dacă } x\in(0,1]\\ x^4 \text{ dacă } x\in(1,+\infty)\end{cases}$$

Scanned with OKEN Scanner

Pe intervalele $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$ funcția este derivabilă fiind funcție polinom.

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{x^7+1}{x+1} = 7$$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \frac{x^5+1}{x+1} = 5$$

Deci funcția f nu este derivabilă în -1.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{x^5}{x} = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x^7}{x} = 0$$

Deci funcția f este derivabilă în 0.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{x^7-1}{x-1} = 7$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x^4-1}{x-1} = 4$$

Deci funcția f nu este derivabilă în 1.
Funcția f este deci derivabilă pe $R - \{-1, 1\}$.

24° *a)* $f'(x) = a\dfrac{k^2-x^2}{(x^2+3k+k^2)^2}$

Va trebui să avem:

$f(k) = -1$ și $f(-k) = -2$ sau $f(k) = -2$ și $f(-k) = -1$.

În primul caz rezultă:

$$k = \frac{1}{2} \text{ și } a = -4$$

În al doilea caz rezultă:

$$k = -\frac{1}{2} \text{ și } a = -4$$

b) În oricare din cele două situații de la punctul anterior rezultă funcția:

$$f(x) = \frac{-4x}{x^2+3x+\frac{1}{4}}$$

Domeniul de definiție este

$$R - \left\{\frac{-3-2\sqrt{2}}{2}, \frac{-3+2\sqrt{2}}{2}\right\}$$

Scanned with OKEN Scanner

Asimptote:

$$y = 0,\ x = \frac{-3-2\sqrt{2}}{2},\ x = \frac{-3+2\sqrt{2}}{2}$$

Derivata întîi:

$$f'(x) = \frac{4x^2-1}{\left(x^2+3x+\frac{1}{4}\right)^2}$$

Tabloul final:

x	$-\infty$		$\frac{-3-2\sqrt{2}}{2}$		$\frac{-1}{2}$		$\frac{-3+2\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	$+$			$+$	0	$-$		$-$		-0	$+$		
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Graficul este prezentat în fig. 6.

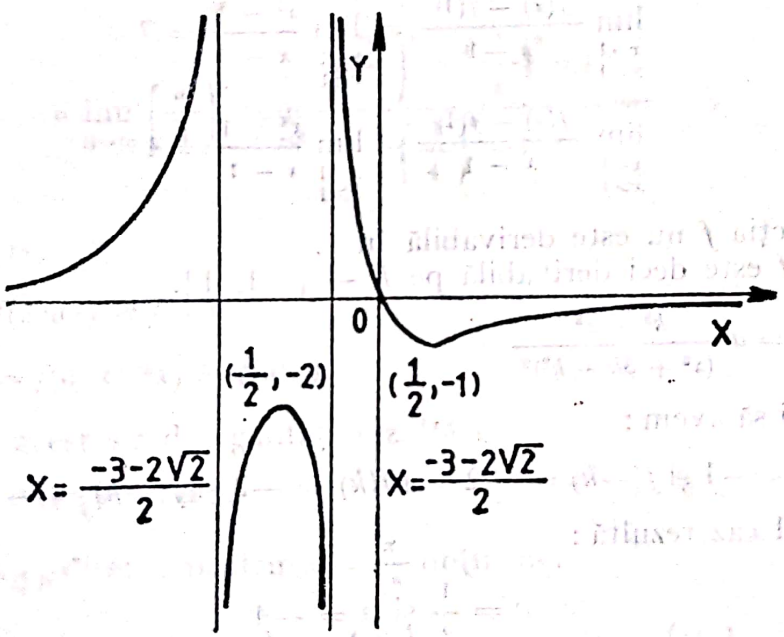


fig. 6

25° Vom arăta mai întîi că:

$$\frac{\sqrt{3}}{5-2} \leqslant \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \leqslant \frac{\sqrt{6}}{5-2}\ (\forall)\ x \in [2,5] \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} \leqslant \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \leqslant \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$(\forall)\ x \in [2,5]$$

Notăm:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$$

x	$-\infty$		-1		1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$\|\|\|\|\|$		$+$		$+$		
$f(x)$		$\nearrow$		$\|\|\|\|\|$	0		$\nearrow$				

În intervalul $[2, 5]$ funcția f este crescătoare, de unde rezultă că:

$$f(2) \leqslant f(x) \leqslant f(5) \quad (\forall)\ x \in [2, 5] \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} \leqslant \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \leqslant \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Integrînd de la 2 la 5 în inegalitatea de mai sus obținem:

$$\int_2^5 \frac{\sqrt{3}}{3}\,dx \leqslant \int_2^5 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx \leqslant \int_2^5 \frac{\sqrt{6}}{3}\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} \leqslant \int_2^5 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx \leqslant \sqrt{6}$$

TESTUL 6

26° Notăm:

$$a_n = n^k(\sqrt[4]{n+a} - \sqrt[4]{n+b}) =$$

$$= n^k \frac{(n+a)-(n+b)}{\sqrt[4]{(n+a)^3} + \sqrt[4]{(n+a)^2(n+b)} + \sqrt[4]{(n+a)(n+b)^2} + \sqrt[4]{(n+b)^3}} =$$

$$= n^k \frac{a-b}{n^{3/4}\left[\sqrt[4]{\left(1+\frac{a}{n}\right)^3} + \sqrt[4]{\left(1+\frac{a}{n}\right)^2\left(1+\frac{b}{n}\right)} + \sqrt[4]{\left(1+\frac{a}{n}\right)\left(1+\frac{b}{n}\right)^2} + \sqrt[4]{\left(1+\frac{b}{n}\right)^3}\right]}$$

a) Dacă $a = b$ atunci $a_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

b) Dacă $a > b$ atunci:

— dacă $k = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

— dacă $k \geqslant 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty(a-b) = +\infty$

c) Dacă $a < 0$ atunci:

— dacă $k = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

— dacă $k \geqslant 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty\,(a-b) = -\infty$

Scanned with OKEN Scanner

27° Considerăm funcția $g:[a,\ b]\to[0,\ b-a]$ $g(x)=f(x)-x$

Evident g este funcție continuă.

Deoarece $f:[a,\ b]\to[a,\ b]$ rezultă că:

$$f(x)\in[a,\ b]\ (\forall)\ x\in[a,\ b]\Rightarrow a\leqslant f(x)\leqslant b\quad(\forall)\ x\in[a,\ b]$$

Dacă $x=a\Rightarrow a\leqslant f(a)\Rightarrow f(a)-a\geqslant 0$ (1)

Dacă $x=b\Rightarrow f(b)\leqslant b\Rightarrow f(b)-b\leqslant 0$ (2)

$g(a)=f(a)-a\geqslant 0$

$g(b)=f(b)-b\leqslant 0\Rightarrow g(a)g(b)\leqslant 0\Rightarrow$

$\Rightarrow(\exists)x_0\in[a,\ b]$ astfel încît $g(x_0)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x_0)=x_0$ adică x_0 este punct fix.

28° $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+25x)^{50}-(1+50x)^{25}}{x^2}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+C_{50}^1\cdot 25x+C_{50}^2(25x)^2+C_{50}^3(25x)^3+\ldots+C_{50}^{50}(25x)^{50}-}{x^2}$$

$$\frac{-(1+C_{25}^1\cdot 50x+C_{25}^2(50x)^2+C_{25}^3(50x)^3+\ldots+C_{25}^{25}(50x)^{25})}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+50\cdot 25x+C_{50}^2\cdot 25^2\cdot x^2+C_{50}^3\cdot 25^3\cdot x^3+\ldots)-}{x^2}$$

$$\frac{-(1+25\cdot 50x+C_{25}^2 50^2x^2+C_{25}^3 50^3x^3+\ldots)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{[x^2(C_{50}^2 25^2-C_{25}^2 50^2)+x(C_{50}^3 25^3-C_{25}^3 50^3+\ldots)]}{x^2}=$$

$$=C_{50}^2\cdot 25^2-C_{25}^2\cdot 50^2.$$

29° *a*) Domeniul de definiție: $R-\{-\sqrt{3},\ \sqrt{3}\}$

Asimptote: $x=-\sqrt{3},\ x=\sqrt{3},\ y=x$

Derivata întîi:

$$f(x)=\frac{x^2(x^2-9)}{(x^2-3)^2}$$

Tabloul final:

x	$-\infty$		-3		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		3		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		0	$-$		$-$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-9/2$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$9/2$ $\nearrow$ $+\infty$

Scanned with OKEN Scanner

Graficul funcției este prezentat în fig. 7.

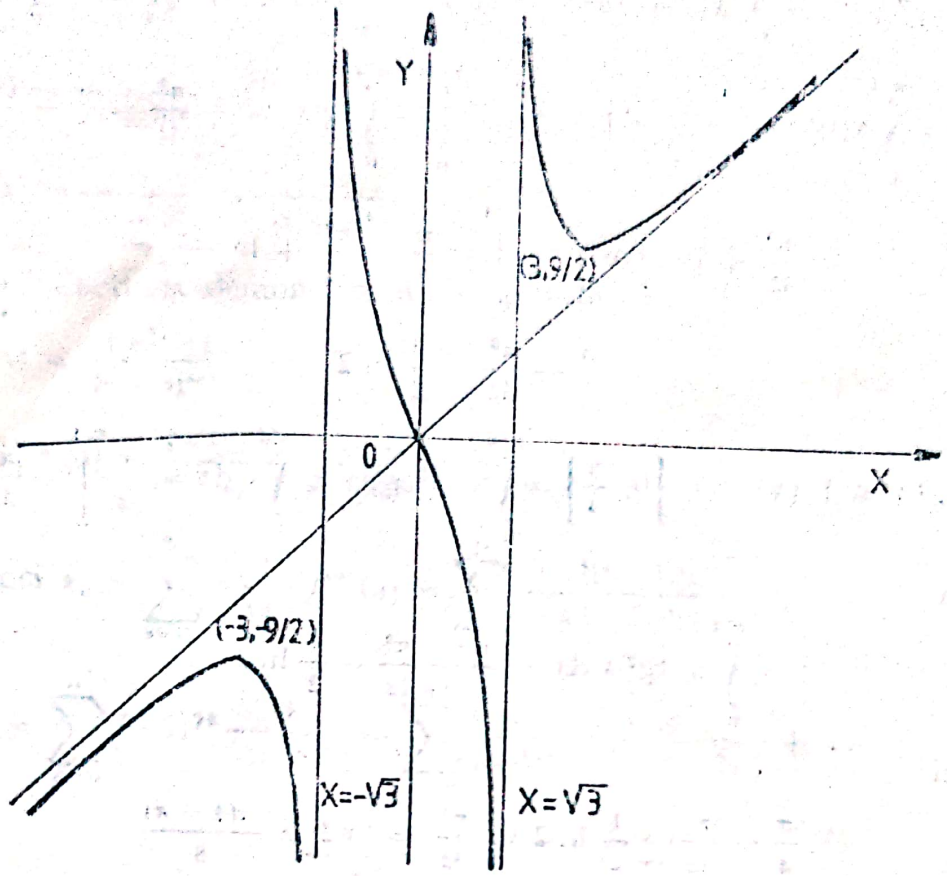


fig. 7

b) $x^3 - ax^2 + 3a = 0 \Rightarrow a = \frac{x^3}{x^2 - 9}$

Rădăcinile ecuației se vor găsi la intersecția curbelor:

$$y = a \text{ și } y = \frac{x^3}{x^2 - 9}$$

Dacă $a < -\frac{9}{2}$ atunci avem trei rădăcini reale.

Dacă $a = -\frac{9}{2}$ atunci avem o rădăcină dublă $x = -3$ și una simplă.

Dacă $-\frac{9}{2} < a < 0$ atunci avem o rădăcină reală

Dacă $a = 0$ avem rădăcina triplă $x = 0$

Dacă $0 < a < \frac{9}{2}$ atunci avem o rădăcină reală.

Dacă $a = \frac{9}{2}$ atunci avem o rădăcină dublă $x = 3$ și o rădăcină simplă.

Dacă $a > \frac{9}{2}$ atunci avem trei rădăcini reale.

Scanned with OKEN Scanner

30° $\int_0^{\pi/4} x \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int_0^{\pi/4} x(1+\operatorname{tg}^2 x - 1)\,dx = \int_0^{\pi/4} x(1+\operatorname{tg}^2 x)\,dx - \int_0^{\pi/4} x\,dx =$

$$= \int_0^{\pi/4} x(\operatorname{tg} x)'dx - \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi/4} = x\operatorname{tg} x\Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\,dx - \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} -$$

$$- \frac{\pi^2}{32} + \ln|\cos x|\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln\frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

$$\operatorname{tg}^2 x \leqslant 1 \quad (\forall)\ x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow \int_0^{\pi/4} x \operatorname{tg}^2 x\,dx \leqslant \int_0^{\pi/4} x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi^2}{32}$$

Însă

$$\int_0^{\pi/4} x \operatorname{tg}^2 x\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{2}\ln 2$$

Deci

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{2}\ln 2 \leqslant \frac{\pi^2}{32} \Rightarrow \ln 2 \geqslant \frac{\pi(4-\pi)}{8}$$

TESTUL 7

31° $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln e^x\left(\frac{x^2}{e^x}+1\right)}{\ln e^x\left(\frac{x^4}{e^x}+1\right)} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln e^x + \ln(x^2/e^x+1)}{\ln e^x + \ln(x^4/e^x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + \ln(x^2/e^x+1)}{x + \ln(x^4/e^x+1)} = 1.$$

32° Considerăm funcția $h : R \to R$, $h(x) = f(x)g(x) - x$. Evident h este continuă.

$h(x_1) = f(x_1)g(x_1) - x_1 = x_1 g(x_1) - x_1 = x_1(g(x_1) - 1) > 0$

deoarece $g(x_1) > 1$

$h(x_2) = f(x_2)g(x_2) - x_2 = x_2 f(x_2) - x_2 = x_2(f(x_2) - 1) < 0$

deoarece $f(x_2) - 1 < 0$

Deci $h(x_1)h(x_2) < 0$ și cum h este continuă rezultă că există $x_3 \in (x_1, x_2)$ astfel încît $h(x_3) = 0$.

Deci $f(x_3)g(x_3) = x_3$.

Scanned with OKEN Scanner

33° $f'(x) = \dfrac{-1}{(x+a)^2}$

$f''(x) = \dfrac{2}{(x+a)^3}$

$f^{(3)}(x) = \dfrac{-2\cdot 3}{(x+a)^4} = \dfrac{-3!}{(x+a)^4}$

Prin inducție se demonstrează cu ușurință că :

$f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$

Deci $f^{(n)}(a) = \dfrac{(-1)^n n!}{(a+a)^{n+1}} = \dfrac{(-1)^n n!}{(2a)^{n+1}}$

Atunci $x_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!} f^{(k)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k (-1)^k k!}{k!\ (2a)^{k+1}} =$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{2k} \frac{1}{(2a)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2a)^{k+1}} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{(2a)^2} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{(2a)^{n+1}} = \frac{1}{2a} \cdot \frac{1 - 1/(2a)^{n+1}}{1 - 1/2a}$$

— Dacă $\dfrac{1}{2a} < 1 \Leftrightarrow a > \dfrac{1}{2}$ atunci $\left(\dfrac{1}{2a}\right)^{n+1} \to 0$

și deci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1/2a}{1 - 1/(2a)} = \frac{1}{2a-1}$$

— Dacă $\dfrac{1}{2a} = 1 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{2}$ atunci

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2\cdot 1/2)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{n} 1 = n$$

și deci $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

— Dacă $\dfrac{1}{2a} > 1 \Leftrightarrow a < \dfrac{1}{2}$ atunci

$$x_n = \frac{1}{2a} + \frac{1}{(2a)^2} + \ldots + \frac{1}{(2a)^{n+1}} > 1 + 1 + \ldots + 1 = n + 1$$

de unde rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Scanned with OKEN Scanner

34° *a*) Domeniul de definiție $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$.
Asimptote: $x = -2$, $x = 0$ și $y = 0$.
Derivata întîi:

$$f'(x) = \frac{-2}{x(x+2)}$$

Tabloul final:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖‖‖‖‖‖‖		‖‖‖‖‖‖‖	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$	‖‖‖‖‖‖‖	$+\infty$	↘	0

Graficul funcției este prezentat în figura 8.

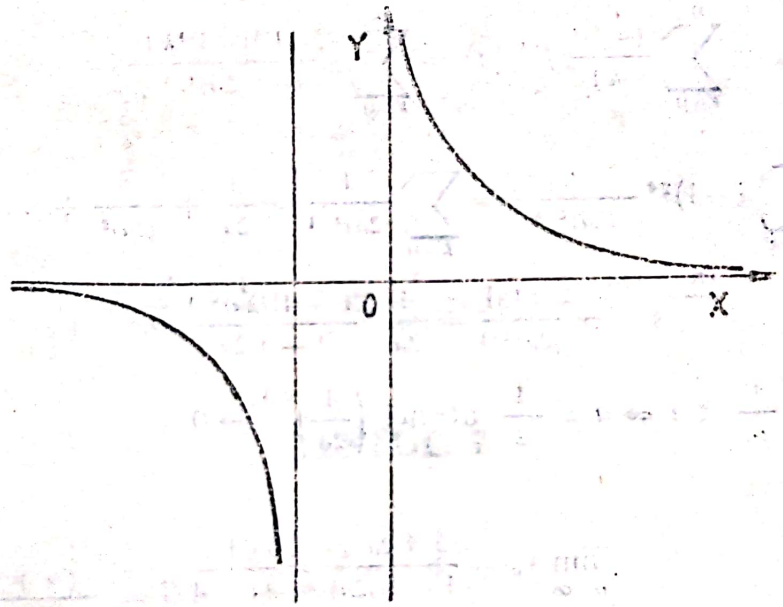


fig. 8

b) $u_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k+2}{k} = \ln \prod_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k} =$

$$= \ln \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdots \cdot \frac{n+2}{n} = \ln \frac{3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} =$$

$$= \ln \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Șirul $(u_n)_{n \geqslant 1}$ este evident divergent.

35° $f(x) = x - 2 + \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9} =$

$$= (x-2) + |x-1| + |x-3|$$

Explicitînd modulele obținem :

$$f(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{dacă } x \in (-\infty, 1] \\ x & \text{dacă } x \in (1, 3] \\ 3x - 6 & \text{dacă } x \in (3, +\infty) \end{cases}$$

Primitivele funcției $f(x)$ sînt :

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + 2x + C_1 & \text{dacă } x \in (-\infty, 1] \\ \frac{x^2}{2} + C_2 & \text{dacă } x \in (1, 3] \\ \frac{3x^2}{2} - 6x + C_3 & \text{dacă } x \in (3, +\infty) \end{cases}$$

Deoarece F trebuie să fie continuă, punînd condițiile de continuitate în 1 și 8 obținem :

$$C_1 = C_2 - 1$$
$$C_3 = C_2 + 9$$

Primitivele vor fi deci de forma :

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + 2x + C - 1 & x \in (-\infty, 1] \\ \frac{x^2}{2} + C & x \in (1, 3] \\ \frac{3x^2}{2} - 6x + C + 9 & x \in (3, +\infty) \end{cases}$$

TESTUL 8

36° $a_n + b_n\sqrt{5} = (2 + \sqrt{5})^n = 2^n + C_n^1 2^{n-1}\sqrt{5} + C_n^2 2^{n-2}(\sqrt{5})^2 +$
$+ C_n^3 2^{n-3}(\sqrt{5})^3 + \ldots + (\sqrt{5})^n = (2^n + C_n^2 2^{n-2} \cdot 5 + \ldots) + \sqrt{5}(C_n^1 2^{n-1} +$
$+ C_n^3 2^{n-3} 5 + \ldots)$.

Identificînd obținem :

$$a_n = 2^n + C_n^2 \cdot 2^{n-2} \cdot 5 + \ldots$$
$$b_n = C_n^1 2^{n-1} + C_n^3 2^{n-3} 5 + \ldots$$

Calculăm acum :

$(2 - \sqrt{5})^n = 2^n - C_n^1 2^{n-1}\sqrt{5} + C_n^2 2^{n-2}(\sqrt{5})^2 - C_n^3 2^{n-3}(\sqrt{5})^3 + \ldots =$
$= (2^n + C_n^2 2^{n-2} 5 + \ldots) - \sqrt{5}(C_n^1 2^{n-1} + C_n^3 2^{n-3} 5 \ldots) = a_n - \sqrt{5} b_n.$

Scanned with OKEN Scanner

Avem deci următoarele relații:

$$a_n + b_n\sqrt{5} = (2 + \sqrt{5})^n$$

$$a_n - b_n\sqrt{5} = (2 - \sqrt{5})^n$$

de unde rezultă că

$$a_n = \frac{(2 + \sqrt{5})^n + (2 - \sqrt{5})^n}{2} \text{ și } b_n = \frac{(2 + \sqrt{5})^n - (2 - \sqrt{5})^n}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{5} \lim_{n\to\infty} \frac{(2 + \sqrt{5})^n + (2 - \sqrt{5})^n}{(2 + \sqrt{5})^n - (2 - \sqrt{5})^n} =$$

$$= \sqrt{5} \lim_{n\to\infty} \frac{(2 + \sqrt{5})^n \left[1 + \left(\frac{2 - \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}}\right)^n\right]}{(2 + \sqrt{5})^n \left[1 - \left(\frac{2 - \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}}\right)^n\right]} = \sqrt{5}$$

37° Considerăm funcția $g : (0, \infty) \to R$, $g(x) = 1 + 2 \ln x - x^2$.

$$g'(x) = \frac{2(1 - x)^2}{x}$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖‖‖‖‖‖‖‖‖‖‖		|	$+$	0	$-$	
$g(x)$	‖‖‖‖‖‖‖‖‖‖‖		| $-\infty$	↗	0	↘	

Deoarece punctul $(1, 0)$ este punct de maxim pentru funcția g rezultă că $g(x) \leqslant 0$, $(\forall)\ x \in (0, \infty)$.
Deci $f(x) = \min(1 + 2 \ln x, x^2) = 1 + 2 \ln x$

$$f'(x) = \frac{2}{x}$$

$$f''(x) = \frac{-2}{x^2}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{2 \cdot 2}{x^3} = 2 \cdot \frac{2!}{x^3}$$

$$f^{(4)}(x) = -2 \cdot \frac{3!}{x^4}$$

Prin inducție demonstrăm cu ușurință că:

$$f^{(n)}(x) = 2(-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}$$

Scanned with OKEN Scanner

38° $\int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^x t \cdot \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = -\int_0^x t(\sqrt{1-t^2})'\,dt =$

$$= -t\sqrt{1-t^2}\Big|_0^x + \int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt = -x\sqrt{1-x^2} + \left(\frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\arcsin t\right)\Big|_0^x = -x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x =$$

$$= -\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x.$$

Deci:

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} & \text{dacă } x = -1 \\ \frac{1}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} & \text{dacă } x \in (-1,\ 1) \\ \frac{\pi}{4} & \text{dacă } x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} \varphi(x) = \lim_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} \left(\frac{1}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\right) = \frac{1}{2}\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} \varphi(x) = \lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} \left(\frac{1}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\right) = \frac{1}{2}\arcsin 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Deci funcția φ este continuă.

$$\lim_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} \frac{\varphi(x) - \varphi(-1)}{x-(-1)} = \lim_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} \frac{\frac{1}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{\pi}{4}}{x+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} \frac{\arcsin x + \frac{\pi}{2}}{x+1}.$$

Făcînd schimbarea de variabilă $y = \arcsin x + \frac{\pi}{2}$.

Dacă $x \to -1$ și $x > -1$ rezultă că $y \to 0$ și $y > 0$

$$y = \arcsin x + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = -\cos y.$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \dfrac{\varphi(x)-\varphi(-1)}{x+1} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \dfrac{y}{1-\cos y} = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \dfrac{y}{2\sin^2 \dfrac{y}{2}} =$

$$= \frac{1}{4} \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \frac{y}{\sin \dfrac{y}{2}} \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \frac{1}{\sin \dfrac{y}{2}} = \frac{1}{4} \frac{1}{\dfrac{1}{2}} \frac{1}{+0} = +\infty.$$

Analog $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1} = +\infty.$

Deci funcția φ nu este derivabilă în -1 și 1.

39° Dacă $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ obținem:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1+x^n(x^2+4)}{x(x^n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n\left[\dfrac{1}{x^n}+x^2+4\right]}{x^n\left[x+\dfrac{x}{x^n}\right]} = \frac{x^2+4}{x}.$$

Dacă $x \in (-1, 1)$ obținem:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1+x^n(x^2+4)}{x(x^n+1)} = \frac{1}{x}.$$

Dacă $x = 1$ obținem:

$$f(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1+5}{2} = 3.$$

Deci:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+4}{x} & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ \dfrac{1}{x} & \text{dacă } x \in (-1, 1) \\ 3 & \text{dacă } x = 1 \end{cases}$$

Asimptote: $x = 0$, $y = x$

Derivata întîi:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x^2} & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ -\dfrac{1}{x^2} & \text{dacă } x \in (-1, 1) \end{cases}$$

Tabloul final:

x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	-3	$-$	$-$	-3	$-$		$+$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	-5	$\mid$	5	$\searrow$	-5	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Graficul funcției este prezentat în figura 9.

Scanned with OKEN Scanner

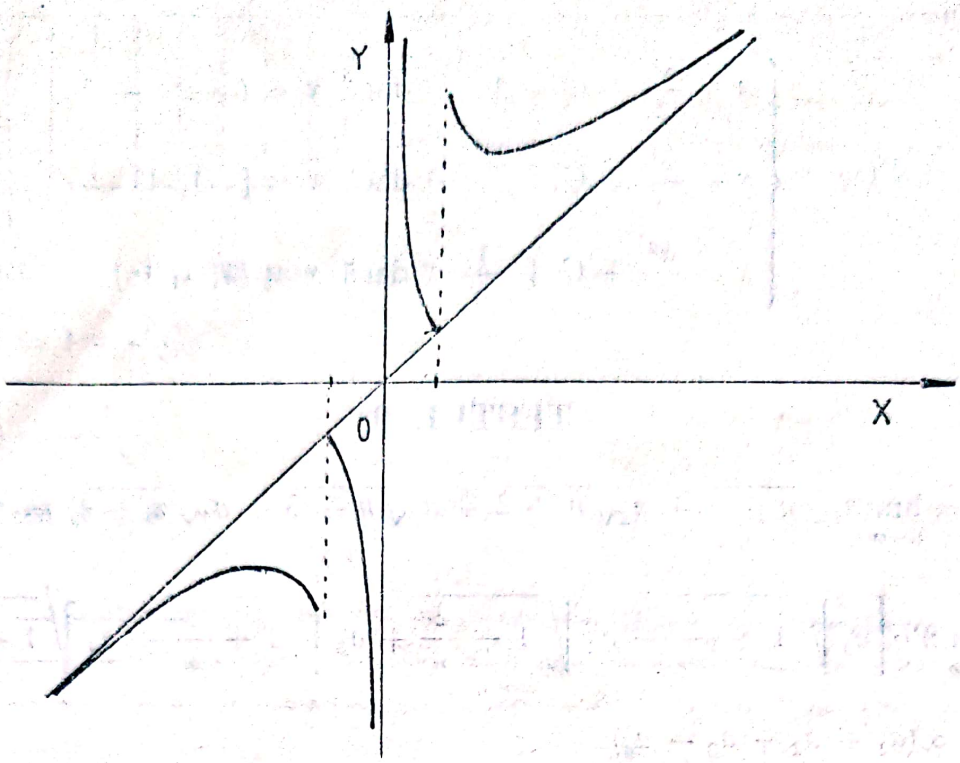


fig. 9

40° $f(x) = \begin{cases} 1 + x & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \\ 1 - x^2 & \text{dacă } x \in (-1, 1) \\ 1 - x & \text{dacă } x \in (1, +\infty) \end{cases}$

f este evident continuă și deci admite primitive, ce vor fi de forma :

$$F(x) = \begin{cases} x + \frac{x^2}{2} + C_1 & \text{dacă } x \in (-\infty, -1) \\ x - \frac{x^3}{3} + C_2 & \text{dacă } x \in (-1, 1) \\ x - \frac{x^2}{2} + C_3 & \text{dacă } x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

Din continuitatea funcției F rezultă :

$$C_1 = -1 + C_2$$

$$C_3 = \frac{1}{6} + C_2$$

Luînd $C_2 = C \Rightarrow C_1 = -1 + C$, $C_3 = \frac{1}{6} + C$

Deci:

$$F(x)=\begin{cases} x+\frac{x^2}{2}+C-1 & \text{dacă } x\in(-\infty,-1)\\ x-\frac{x^3}{3}+C & \text{dacă } x\in[-1,1]\\ x-\frac{x^2}{2}+C+\frac{1}{6} & \text{dacă } x\in(1,+\infty)\end{cases}$$

TESTUL 9

41° $L=\lim\limits_{n\to\infty}(a_1\sqrt{n+1}+a_2\sqrt{n+2}+a_3\sqrt{n+3}+a_4\sqrt{n+4})=$

$$=\lim_{n\to\infty} n^{1/2}\left[a_1\sqrt{1+\frac{1}{n}}+a_2\sqrt{1+\frac{2}{n}}+a_3\sqrt{1+\frac{3}{n}}+a_n\sqrt{1+\frac{4}{n}}\right]=$$

$$=\infty(a_1+a_2+a_3+a_4).$$

a) Dacă $a_1+a_2+a_3+a_4>0$ atunci $L=+\infty$

b) Dacă $a_1+a_2+a_3+a_4<0$ atunci $L=-\infty$

c) Dacă $a_1+a_2+a_3+a_4=0$ atunci $a_4=-a_1-a_2-a_3$

și înlocuind în limita inițială obținem:

$$L=\lim_{n\to\infty}[a_1\sqrt{n+1}+a_2\sqrt{n+2}+a_3\sqrt{n+3}-(a_1+a_2+a_3)\sqrt{n+4}]=$$

$$=a_1\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+4})+a_2\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+4})+$$

$$+a_3\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+4})=a_1\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-(n+4)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+4}}+$$

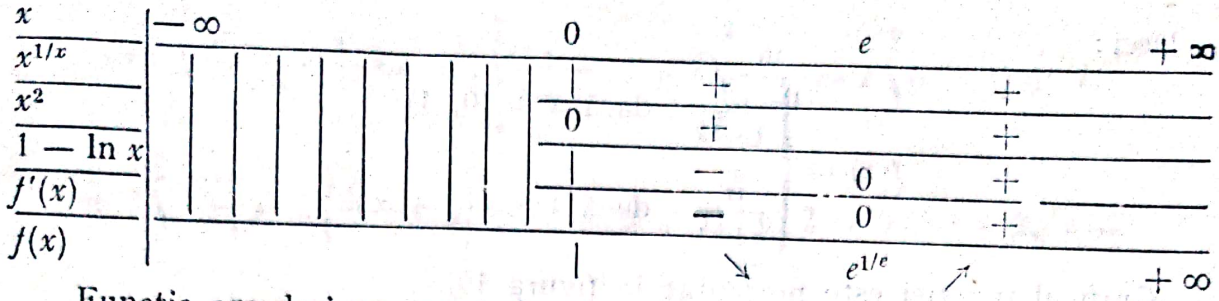
$$+a_2\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)-(n+4)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+4}}+a_3\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3)-(n+4)}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4}}=$$

$$=a_1\lim_{n\to\infty}\frac{-3}{n^{1/2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{4}{n}}\right)}+a_2\lim_{n\to\infty}\frac{-2}{n^{1/2}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{4}{n}}\right)}+$$

$$+a_3\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{n^{1/2}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{4}{n}}\right)}=a_1\cdot0+a_2\cdot0+a_3\cdot0=0.$$

42° $f'(x)=\frac{x^{1/x}}{x^2}(1-\ln x)$

Scanned with OKEN Scanner

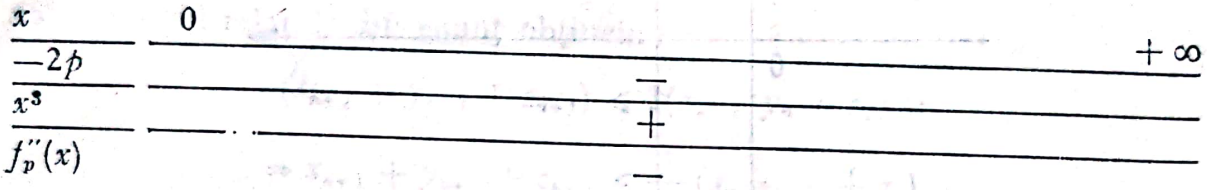


Funcția are deci un punct de minim $(e,\ e^{1/e})$.

43° $f_p'(x) = 1 + \frac{p}{x^2}$.

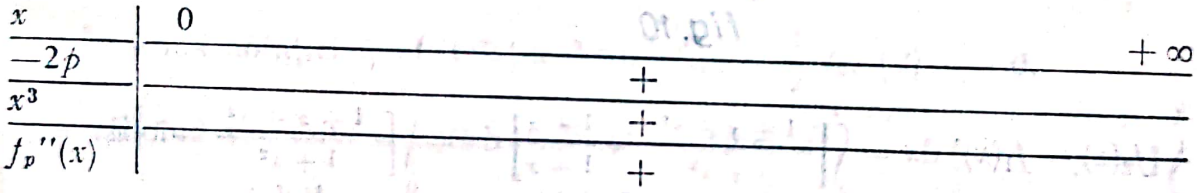
$f_p''(x) = -\frac{2p}{x^3}$.

a) dacă $p \geqslant 0$



Deci f_p este concavă

b) dacă $p < 0$



Deci f_p este convexă.

44° $f_n(x) = \frac{1 + x + x^2 + \ldots + x^n}{1 + x^n} \quad \frac{1 - x^{n+1}}{(1 + x^n)(1-x)}$ dacă $x \neq 1$

Dacă $x = 1$ atunci $f_n(1) = \frac{1 + 1^1 + 1^2 + \ldots + 1^n}{1 + 1^n} = \frac{n+1}{2}$.

a) Dacă $x \in [0,\ 1) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{(1 + x^n)(1 - x)} = \frac{1}{1-x}$.

b) Dacă $x \in (1,\ +\infty)$ atunci $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{(1 + x^n)(1 - x)} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x^n \left[\frac{1}{x^n} - x\right]}{x^n \left(\frac{1}{x^n} + 1\right)(1 - x)} = \frac{-x}{1-x} = \frac{x}{x-1}$$

Deci:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{dacă } x \in (0,\ 1) \\ \dfrac{x}{x-1} & \text{dacă } x \in (1,\ +\infty) \end{cases}$$

Graficul funcției este prezentat în figura 10.

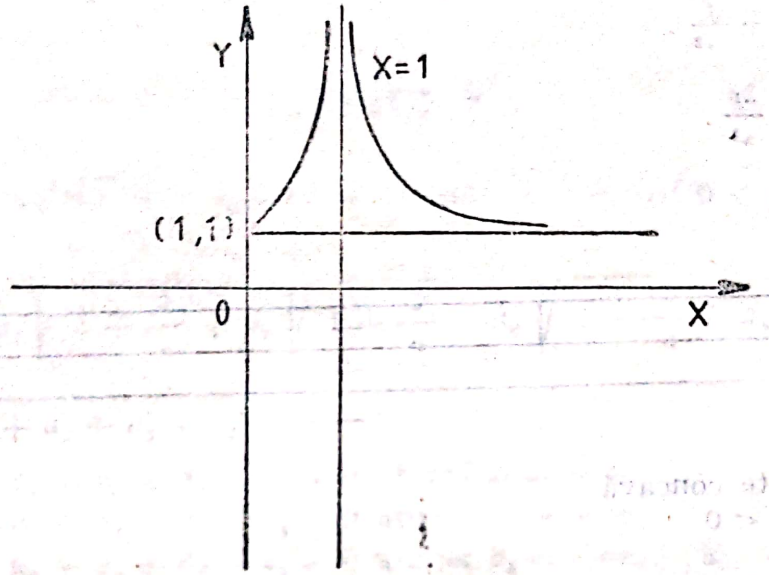


fig. 10

$$\int_0^1 [f_2(x) - f_1(x)]\,dx = \int_0^1 \left[\frac{1+x+x^2}{1+x^2} - \frac{1+x}{1+x}\right] dx = \int_0^1 \left[\frac{1+x+x^2}{1+x^2} - 1\right] dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1+x^2)'}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2.$$

45° Funcția $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ este continuă pe $[0,\ 4]$ deci admite primitive și este integrabilă pe $[0,\ 4]$.

Făcînd schimbarea de variabilă $\varphi(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,\ 4]$, observăm că φ nu este derivabilă în 0.

Deoarece teorema de schimbare de variabilă cere ca φ să fie derivabilă cu derivata continuă pe $[0,\ 4]$ vom calcula pentru $\varepsilon > 0$:

$$I(\varepsilon) = \int_\varepsilon^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int_\varepsilon^4 \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2x}{1+\sqrt{x}}\,dx = \int_{\sqrt{\varepsilon}}^2 \frac{2t^2}{1+t}\,dt =$$

$$= 2\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{2} \frac{t^2-1+1}{t+1}\,dt = 2\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{2} \frac{t^2-1}{t+1}\,dt + 2\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{2} \frac{dt}{t+1} = 2\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{2} (t-1)\,dt +$$

$$+ 2\int_{\sqrt{\varepsilon}}^{2} \frac{dt}{t+1} = 2\left(\frac{t^2}{2} - t\right)\Big|_{\sqrt{\varepsilon}}^{2} + 2\ \ln(t+1)\Big|_{\sqrt{\varepsilon}}^{2} = 2\ \ln 3 - \varepsilon + 2\sqrt{\varepsilon} -$$

$$- 2\ \ln(1+\sqrt{\varepsilon}).$$

$$I = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} I(\varepsilon) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} [2\ \ln 3 - \varepsilon + 2\sqrt{\varepsilon} - 2\ \ln(1+\sqrt{\varepsilon})] = 2\ \ln 3.$$

TESTUL 10

46° Adunînd relaţiile din enunţ obţinem :

$$4(x_{n+1} + y_{n+1} + z_{n+1}) \leqslant 2(x_n + y_n + z_n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_{n+1} + y_{n+1} + z_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(x_n + y_n + z_n).$$

Notăm : $x_n + y_n + z_n = t_n$ şi deoarece $x_n \geqslant 0$, $y_n \geqslant 0$, $z_n \geqslant 0$ rezultă că $t_n \geqslant 0$.

În urma notaţiei făcute relaţia devine $t_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} t_n$, $(\forall)\ n \geqslant 0$.

Aplicînd succesiv această inegalitate obţinem :

$$t_n \leqslant \frac{1}{2} t_{n-1} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^2 t_{n-2} \leqslant \ldots \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n t_0 \Rightarrow 0 < t_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n t_0 \to 0 \Rightarrow t_n \to 0.$$

Avem deci :

$$0 \leqslant x_n \leqslant t_n \to 0 \Rightarrow x_n \to 0$$

$$0 \leqslant y_n \leqslant t_n \to 0 \Rightarrow y_n \to 0$$

$$0 \leqslant z_n \leqslant t_n \to 0 \Rightarrow z_n \to 0$$

47° $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{xf(x)}{x} = a.$

Aplicînd regula lui l'Hospital obţinem :

$$a = \lim_{x\uparrow\infty} \frac{xf(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{[xf(x)]'}{x'} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) + xf'(x)}{1} = \lim_{x\to\infty} f(x) +$$

$$+ \lim_{x\to\infty} xf'(x) = a + \lim_{x\to\infty} xf'(x).$$

Scanned with OKEN Scanner

Deci $a = a + \lim\limits_{x\to\infty} xf'(x) \Rightarrow \lim xf'(x) = 0$.

48° $f'(x) = \dfrac{3(x^2-2)}{(x^2+2)^2}$.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{4+3\sqrt{2}}{4}$	$\searrow$	$\dfrac{4-3\sqrt{2}}{4}$	$\nearrow$	

Funcția are deci un punct de maxim $\left(-\sqrt{2}, \dfrac{4+3\sqrt{2}}{4}\right)$ și un punct de minim $\left(\sqrt{2}, \dfrac{4-3\sqrt{2}}{4}\right)$.

49° Explicitînd modulele obținem:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x^2-2x+2)}{x(2-x)} & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \\ \dfrac{4(x-1)}{x(2-x)} & \text{dacă } x \in (0, 2) \\ \dfrac{2(x^2-2x+2)}{x(x-2)} & \text{dacă } x \in (2, +\infty). \end{cases}$$

Asimptote: $x = 0$, $x = 2$, $y = 2$ la ramura spre $+\infty$, $y = -2$ la ramura spre $-\infty$.

Derivata întîi:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{8(x-1)}{x^2(2-x)^2} & \text{dacă } x \in (-\infty, 0) \\ \dfrac{4(x-2x+2)}{x^2(2-x)^2} & \text{dacă } x \in (0, 2) \\ \dfrac{8(1-x)}{x^2(2-x)^2} & \text{dacă } x \in (2, +\infty). \end{cases}$$

Tabloul de variație:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\vert$	$+$	$\vert$	$-$	
$f(x)$	-2	$\searrow$	$-\infty \vert -\infty$	$\nearrow$	$+\infty \vert +\infty$	$\searrow$	2

Scanned with OKEN Scanner

Graficul funcției este prezentat în figura 11.

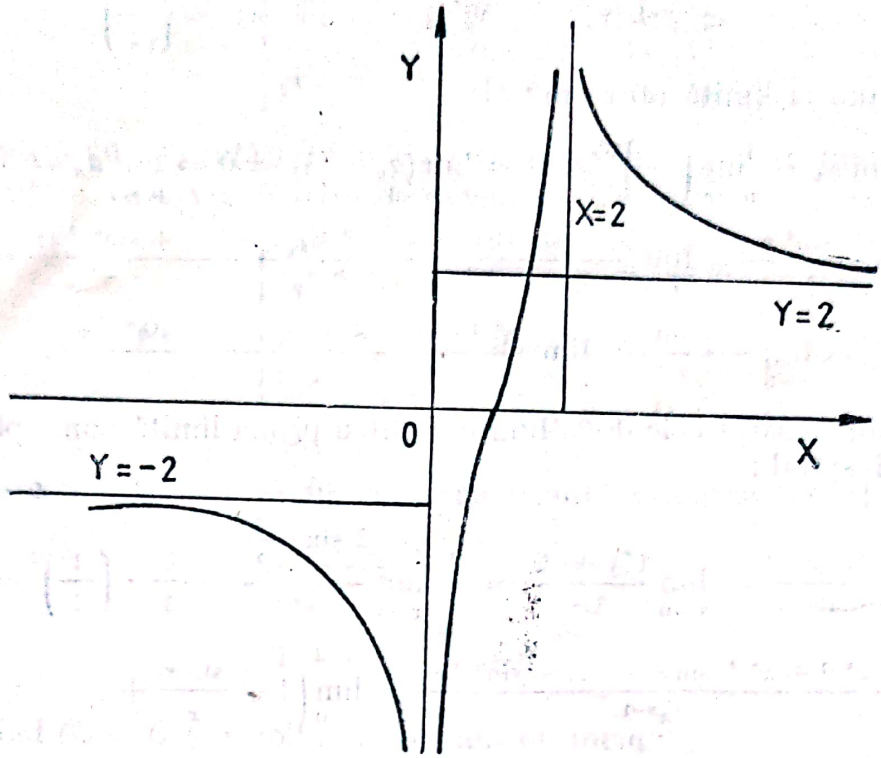


fig. 11

50° $2\int_0^1 f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2} \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx \Rightarrow \int_0^1 [f(x) - x]\,dx = 0.$

Aplicînd teorema de medie rezultă că există $x_0 \in (0, 1)$ astfel încît

$$\int_0^1 [f(x) - x]\,dx = f(x_0) - x_0.$$

Însă $\int_0^1 [f(x) - x] = 0$ de unde rezultă că :

$$f(x_0) - x_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = x_0.$$

TESTUL 11

51° $a_{n+1} = a_n^2 - 6a_n + 12 = a_n^2 - 6a_n + 9 + 3 = (a_n - 3)^2 + 3 \Rightarrow a_{n+1} - 3 = (a_n - 3)^2.$

Notînd : $x_n = a_n - 3$ obținem :

$$x_0 = \frac{1}{2} \text{ și } x_{n+1} = x_n^2 \quad (\forall) \quad n \geqslant 0$$

Scanned with OKEN Scanner

Aplicînd succesiv relația de recurență obținem :

$$x_n = x_{n-1}^2 = x_{n-2}^{2^2} = x_{n-3}^{2^3} = \ldots = x_0^{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$$

și trecînd la limită obținem :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n - 3) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 3.$$

52° $$\lim_{x\to 0}\frac{x^n - \sin^n x}{x^{n+2}} = \lim_{x\to 0}\frac{(x - \sin x)(x^{n-1} + x^{n-2}\sin x + \ldots + \sin^{n-1} x)}{x^{n+2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^{n-1} + x^{n-2}\sin x + \ldots + \sin^{n-1} x}{x^{n-1}}.$$

Calculăm separat cele două limite. Pentru prima limită vom aplica regula lui l Hospital :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^{n-1} + x^{n-2}\sin x + \ldots + \sin^{n-1} x}{x^{n-1}} = \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{\sin x}{x} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin^2 x}{x^2} + \ldots + \frac{\sin^{n-1} x}{x^{n-1}}\right) = 1 + 1 + \ldots + 1 = n.$$

Deci $\lim_{x\to 0}\frac{x^n - \sin^n x}{x^{n+2}} = \frac{n}{6}$.

53° Considerăm funcția $g(x) = x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x^2 - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$x^2 + 1$		$+$		$+$		$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dacă $x \in (-\infty, -1)$ atunci $g(x) > 0 \Leftrightarrow x^4 - 1 > 0 \Rightarrow x^4 > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \max\{1, x^4\} = x^4 \Rightarrow f(x) = x^4$.

Dacă $x = -1$ atunci $f(x) = 1$.

Dacă $x \in (-1, 1)$ atunci $g(x) < 0 \Rightarrow x^4 - 1 < 0 \Rightarrow x^4 < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \max\{1, x^4\} = 1 \Rightarrow f(x) = 1$.

Dacă $x = 1$, atunci $f(x) = 1$.

Dacă $x \in (1, +\infty)$ atunci $g(x) < 0 \Rightarrow f(x) = x^4$.

Scanned with OKEN Scanner

Deci funcția f poate fi explicitată astfel:

$$f(x)=\begin{cases} x^4 & \text{dacă } x\in(-\infty,\ -1)\\ 1 & \text{dacă } x\in[1\ ,1]\\ x^4 & \text{dacă } x\ni(1,\ +\infty)\end{cases}$$

Se arată cu ușurință că funcția f este continuă și deci funcția f admite primitive, care vor fi date de formula:

$$F(x)=\begin{cases} \frac{x^5}{5}+C_1 & \text{dacă } x\in(-\infty,\ -1)\\ x+C_2 & \text{dacă } x\in[-1,\ 1]\\ \frac{x^5}{5}+C_3 & \text{dacă } x\in(1,\ +\infty)\end{cases}$$

Deoarece F trebuie să fie continuă rezultă următoarele relații:

$$-\frac{1}{5}+C_1=-1+C_2$$

$$1+C_2=\frac{1}{5}+C_3.$$

Notînd $C_2=C$ și rezolvînd sistemul obținem:

$$C_1=C-\frac{4}{5}$$

$$C_3=C+\frac{1}{5}.$$

Deci primitivele funcției f vor fi:

$$F(x)=\begin{cases} \frac{x^5}{5}-\frac{4}{5}+C & \text{dacă } x\in(-\infty,\ -1)\\ x+C & \text{dacă } x\in[-1,\ 1]\\ \frac{x^5}{5}+\frac{4}{5}+C & \text{dacă } x\in(1,\ +\infty)\end{cases}$$

54° *a)* $f'(x)=\dfrac{2\alpha x^2+(2\alpha+\beta)x+\beta-1}{x+1}$.

Funcția f va admite două extreme dacă $\Delta>0$

$$\Delta=(2\alpha-\beta)^2+8\alpha$$

Deci condiția va fi $(2\alpha-\beta)^2+8\alpha>0$.

b) Pentru $\alpha=-1$ și $\beta=1$ obținem $f(x)=-x^2+x-\ln(x+1)$.

Domeniul de definiție: $x\in(-1,\ +\infty)$.

Asimptote: $x=-1$.

Scanned with OKEN Scanner

Derivata întîi : $f'(x) = \dfrac{-2x^2 - x}{x+1}$.

Derivata a doua : $f''(x) = \dfrac{-2x^2 - 4x - 1}{(x+1)^2}$.

Tabloul final :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{-2+\sqrt{2}}{2}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{3}{4} + \ln 2$	$\nearrow$			0	$\searrow$	$-\infty$
$f''(x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	

Graficul funcției va fi prezentat în figura 12.

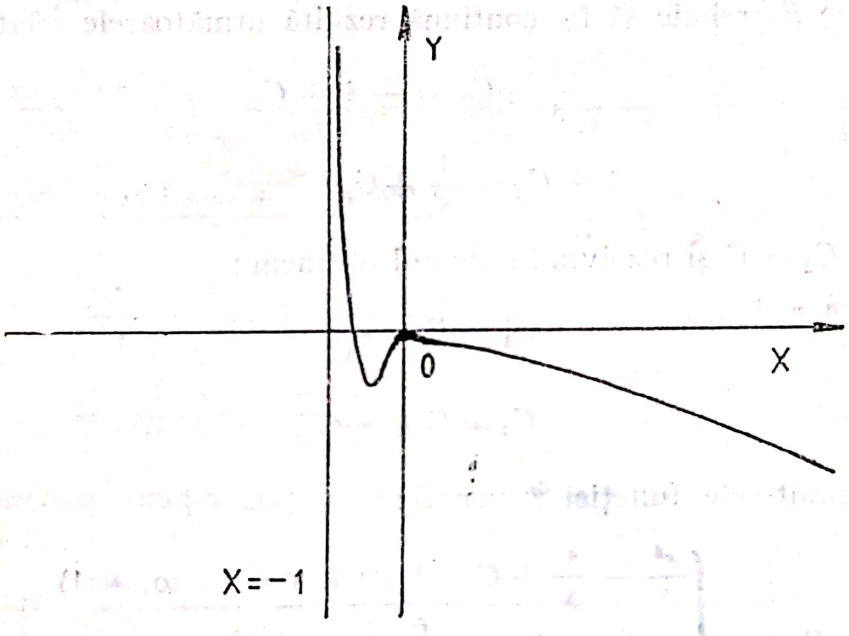


fig. 12

c) $A = \left| \int_{-1/2}^{0} (-x^2 + x - \ln(x+1))\,dx \right| = \left| \int_{-1/2}^{0} (-x^2 + x)\,dx - \right.$

$\left. - \int_{1/2}^{0} x' \ln(x+1) \right| = \left| \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1/2}^{0} - x \ln(x+1) \Big|_{-1/2}^{0} + \int_{-1/2}^{0} \frac{x}{x+1}\,dx \right| =$

$= \left| -\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + \int_{-1/2}^{0} \frac{x+1-1}{x+1}\,dx \right| = \left| -\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + \right.$

$\left. + \int_{-1/2}^{0} dx + \int_{-1/2}^{0} \frac{1}{x+1}\,dx \right| = \left| -\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} + (x + \ln(x+1)) \Big|_{-1/2}^{0} \right| =$

$= \left| \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \ln 2 \right| = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{3}.$

Scanned with OKEN Scanner

55° $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-1} & \text{dacă } x \in (-\infty, -1] \\ \sqrt{1-x^2} & \text{dacă } x \in (-1, 1] \\ \sqrt{x^2-1} & \text{dacă } x \in (1, +\infty) \end{cases}$

Primitivele acestei funcții vor fi :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C_1 & \text{dacă } x \in (-\infty, -1] \\ \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C_2 & \text{dacă } x \in (-1, 1] \\ \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C_3 & \text{dacă } x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

Deoarece F trebuie să fie continuă, din continuitatea în -1 și 1 rezultă relațiile :

$$C_1 = C_2 - \frac{\pi}{4}$$

$$C_3 = C_2 + \frac{\pi}{4}$$

Notînd $C_2 = C$ rezultă $C_1 = C - \frac{\pi}{4}$ și $C_3 = C + \frac{\pi}{4}$.

Deci primitivele funcției sînt :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C - \frac{\pi}{4}, & x \in (-\infty, -1] \\ \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C, & x \in (-1, 1] \\ \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}| + C + \frac{\pi}{4}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

TESTUL 12

56° $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2 - \sqrt{n^4-n^3+1})\sin\frac{\pi}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4-(n^4-n^2+1)}{n^2+\sqrt{n^4-n^3+1}}\sin\frac{\pi}{n} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^2+\sqrt{n^4-n^3+1}}\sin\frac{\pi}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1-\frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left[1+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^4}}\right]}\sin\frac{\pi}{n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{\pi}} = \pi.$$

Scanned with OKEN Scanner

57° Dacă $x < 0$ atunci :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2 + xe^{nx}}{1 + e^{nx}} = x^2$$

Dacă $x = 0$, atunci :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{0 + 0}{1 + 1} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Dacă $x > 0$ atunci :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2 + xe^{nx}}{1 + e^{nx}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{nx}\left[\frac{x^2}{e^{nx}} + x\right]}{e^{nx}\left[\frac{1}{e^{nx}} + 1\right]} = x.$$

Deci $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dacă } x \leqslant 0 \\ x & \text{dacă } x > 0 \end{cases}$

$f(0) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} x^2 = 0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} x = 0$

Deci funcția f este continuă în 0 și deci continuă pe R.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} x = 0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$

Deci funcția f nu este derivabilă în 0 și deci f este derivabilă pe $R - \{0\}$

58° Fie $f, g : [1, e] \to R$, $f(x) = x^{1/x}$, $g(x) = 1 + \frac{3}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = x^{1/x} \frac{1 - \ln x}{x^2}$

x	$-\infty$		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	||||||||||	$+$	0	$+$	0	$-$	|||||||||\

Ne rămîne să arătăm că $f(e) < g(e)$. Însă

$$f(e) = e^{1/e} = \sqrt[e]{e} < \sqrt{e} < \sqrt{3} < 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{3}{2\sqrt{3}} <$$

$$< 1 + \frac{3}{2\sqrt{e}} = g(e) \tag{3}$$

În virtutea inegalităților (1), (2), (3) rezultă că

$$x^{1/x} < 1 + \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

59° Domeniul de definiție este $[-k, +\infty)$

Asimptote : nu există

Derivata întîi : $f'(x) = \dfrac{5x^2 + 4xk}{2\sqrt{x+k}}$

Derivata a doua : $f''(x) = \dfrac{15x^2 + 24kx + 8k^2}{4(x+k)\sqrt{x+k}}$

a) Dacă $k > 0$ tabloul final este :

x	$-\infty$		$-k$		$-\frac{4k}{5}$		$\frac{-12+2\sqrt{6}}{15}k$		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	‖	‖	+	0	−		−	0	+	
$f(x)$	‖	‖	0	↗	$\frac{16k^2}{25}\sqrt{\frac{k}{5}}$	↘		↘	0	↗	
$f''(x)$	‖	‖	‖	−		−	0	+		+	$+\infty$

Graficul funcției este prezentat în fig. 13.

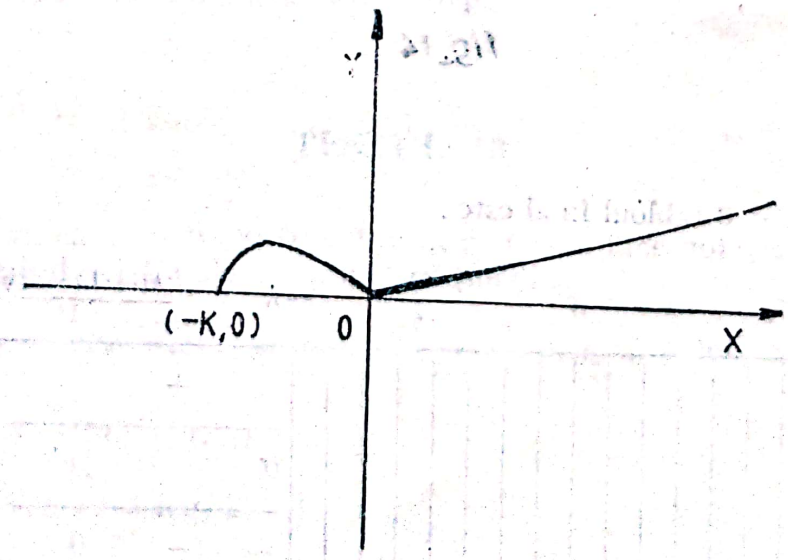


fig. 13

Scanned with OKEN Scanner

b) Dacă $k = 0$ tabloul final este:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$			|	$+$	
$f(x)$			0	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$			|	$+$	

Graficul funcției este prezentat în fig. 14.

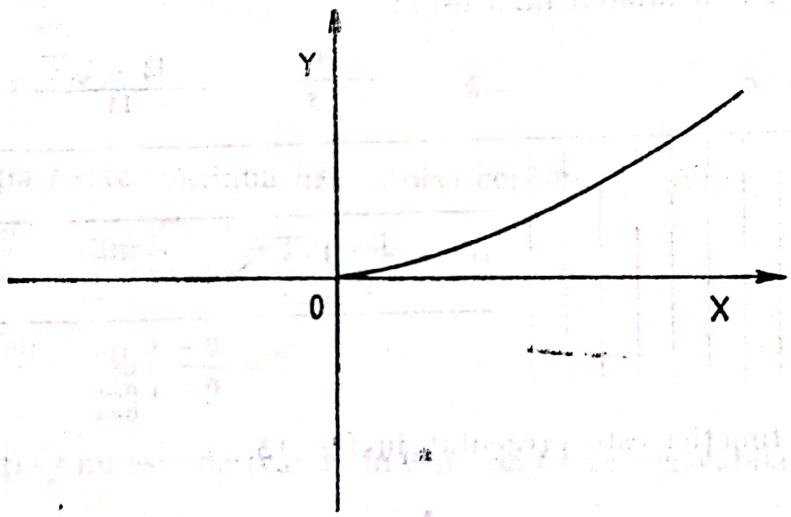


fig. 14

e) Dacă $k < 0$ tabloul final este:

x	$-\infty$		0		$-\frac{4k}{5}$		$-k$		$\frac{k(-12-2\sqrt{6})}{15}$		$+\infty$
$f'(x)$			|	$+$		$+$		$+$		
$f(x)$			0	$\nearrow$							$+\infty$
$f''(x)$			|	$-$		$-$	0	$+$			

Scanned with OKEN Scanner

Graficul funcției este prezentat în fig. 15.

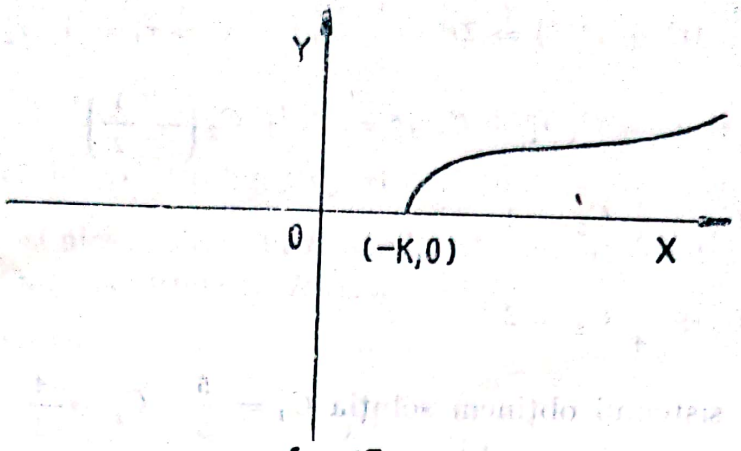


fig. 15

60° *a*) Vom determina pe $m \in R$ astfel încît f să fie continuă și în acest caz f va admite primitive.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} [2 + \ln(1 - x)] = 2$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} [1 + e^{-2x}] = 2$$

$$f(0) = m$$

Dacă $m = 2$ atunci f este continuă și deci admite primitive.

b) Fie $F(x)$ o primitivă a lui $f(x)$. Atunci:

$$F'(x) = f(x)$$

Se observă cu ușurință că $f(x) > 0$ $(\forall)$ $x \in R$ de unde rezultă că $F'(x) > 0$ $(\forall)$ $x \in R$, adică $F(x)$ este strict crescătoare.

TESTUL 13

61° Se observă că $x_n > 0$ $(\forall)$ $n \geq 1$ și atunci vom face notația $a_n = \log_2 x_n$. Logaritmînd relația de recurență obținem:

$$\log_2 x_{n+1} = \log_2 \sqrt{x_n x_{n-1}} \Rightarrow \log_2 x_{n+1} = \frac{1}{2}(\log_2 x_n + \log_2 x_{n-1})$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$$

$$a_1 = \log_2 x_1 = \log_2 2 = 1$$

$$a_2 = \log_2 x_2 = \log_2 4 = 2$$

Scanned with OKEN Scanner

Vom căuta soluții de forma $a_n = r^n$. Înlocuind în relația (1) obținem:

$$r^{n+1} = \frac{1}{2}(r^n + r^{n-1}) \Rightarrow 2r^2 - r - 1 = 0 \Rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = -\frac{1}{2}$$

Soluția va fi $a_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n = C_1 + C_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$$a_1 = 1 \Rightarrow C_1 - \frac{1}{2}C_2 = 1$$

$$a_2 = 2 \Rightarrow C_1 + \frac{1}{4}C_2 = 2$$

Rezolvînd sistemul obținem soluția $C_1 = \frac{5}{3}$, $C_2 = \frac{4}{3}$

Deci

$$a_n = \frac{5}{3} + \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow x_n = 2^{5/3+(4/3)(-1/2)^n}$$

Evident șirul este convergent și

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} 2^{5/3+4/3(-1/2)^n} = 2^{5/3} = \sqrt[3]{32}$$

62° $$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt[m]{1+\alpha x} - 1) + (1 - \sqrt[n]{1+\beta x})}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - 1}{x} + \lim_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+\alpha x - 1}{(\sqrt[m]{(1+\alpha x)^{m-1}} + \ldots + 1)x} + \lim_{x\to 0} \frac{1 - 1 - \beta x}{(\sqrt[n]{(1+\beta x)^{n-1}} + \ldots + 1)x} =$$

$$= \frac{\alpha}{1+1+\ldots+1} + \frac{-\beta}{1+1+\ldots+1} = \frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n}.$$

63° *a*) Vom demonstra că $T \in Q - \{0\}$ este perioadă pentru funcția f. Dacă $x \in Q$ arbitrar atunci $x + T \in Q$, de unde rezultă că

$$f(x+T) = 1 = f(x).$$

Dacă $x \in R - Q$ arbitrar atunci $x + T \in R - Q$, de unde rezultă că

$$f(x+T) = -1 = f(x).$$

Deci T este perioadă.

b), Fie $x_0 \in R$ arbitrar și două șiruri $(x_n)_{n\geq 0}$, $(x'_n)_{n\geq 0}$,

$$x_n \in Q\ (\forall)\ n \in N,\ x'_n \in R - Q\ (\forall)\ n \in N,$$

$$x_n \to x_0,\ x'_n \to x_0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Atunci :

$$f(x_n) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 1$$

$$f(x'_n) = -1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x'_n) = -1$$

de unde rezultă că $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(x'_n)$ și deci funcția f nu este continuă în x_0. Cum x_0 a fost ales arbitrar în R rezultă că f nu este continuă pe R.

c) Deoarece f nu e continuă pe R rezultă că f nu e derivabilă pe R.

64° Asimptote : $x = 1$

Derivata întîi :

$$f'(x) = \frac{e^x\left(\ln x - \frac{1}{x}\right)}{\ln^2 x}$$

Pentru a face semnul funcției $f'(x)$ notăm :

$$g(x) = \ln x - \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2} > 0 \Rightarrow g(x) \text{ este crescătoare.}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} g(x) = -1$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} g(x) = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

Deci $\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} g(x) \cdot \lim_{x\to\infty} g(x) < 0$ și cum $g(x)$ este continuă pe $(1, +\infty)$ rezultă că există $x_0 \in (1, +\infty)$ astfel încît $g(x_0) = 0$. Însă $g(e) = \ln e - \frac{1}{e} > 0$.

Deci $\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} g(x) \cdot g(e) < 0$ de unde rezultă că $x_0 \in (1, e]$

x	0		1		x_0		e		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$-$	-1	$-$	0	$+$			$+\infty$

Tabloul final :

x	0		1		x_0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$	$-$	$\|$	$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ $+\infty$	$\searrow$	$f(x_0)$		$\nearrow$		

Graficul funcției este prezentat în fig. 16.

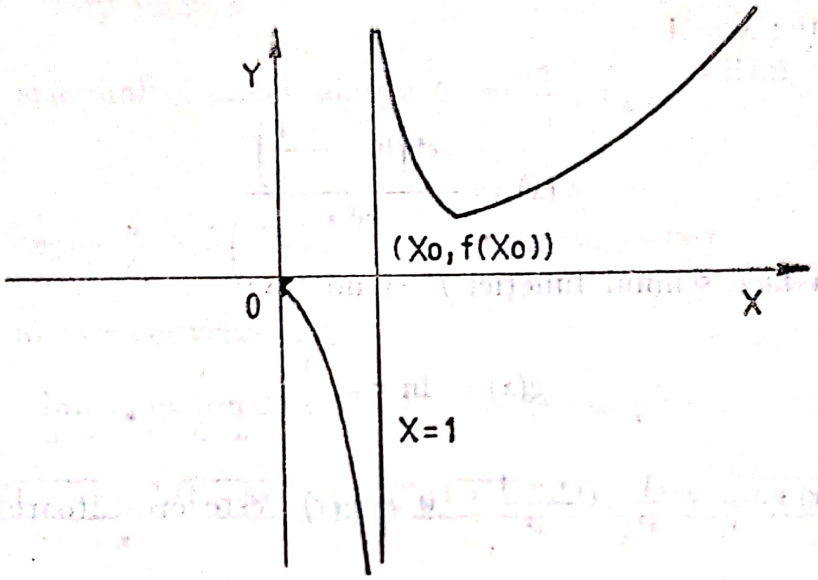


fig.16

65° $a_n = \int_1^n \frac{2x^2}{x^2+1}\,dx = \int_1^n \frac{2x^2+2-2}{x^2+1}\,dx = 2\int_1^n dx - 2\int_1^n \frac{dx}{x^2+1} =$

$$= [2x - 2\operatorname{arctg} x]\Big|_1^n = 2n - 2 - 2\operatorname{arctg} n + \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n-4-2a_n}{\pi}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n-4-4n+4+4\operatorname{arc\,tg} n-\pi}{\pi}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4\operatorname{arc\,tg} n-\pi}{\pi}\right)^n$$

Sîntem în cazul de nedeterminare 1^∞ și după aplicarea algoritmului specific acestui caz obținem :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n-4-2a_n}{\pi}\right)^n = e^{\lim\limits_{n\to\infty}(4/\pi)\,n\,(\operatorname{arc\,tg} n-\pi/2)}$$

Însă

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} n - \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n\right) = -\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} n) =$$

$$= -\frac{1}{\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} n)} = -\frac{1}{n} \Rightarrow \operatorname{arctg} n - \frac{\pi}{2} = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{n}\right) =$$

$$= -\operatorname{arctg}\frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n\left(\operatorname{arctg} n - \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(-\operatorname{arctg}\frac{1}{n}\right) =$$

$$= -\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = -1$$

Deci

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n - 4 - 2a_n}{\pi}\right)^n = e^{-4/\pi}$$

TESTUL 14

66° Notăm:

$$a_n = \frac{1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n}{(n+1)!} = \frac{\frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1}}{(n+1)!} = \frac{2^{n+1} - 1}{(n+1)!} < \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2}{n+1} < \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

Deci $0 < a_n < 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ și trecînd la limită în această inegalitate obținem:

$$0 \leqslant \lim_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim_{n\to\infty} 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 0$$

și deci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

67° Considerăm funcția $h : [0, 1] \to R$

$$h(x) = \frac{f(x)}{g^n(x)} \quad (\forall)\ n \in N^*$$

Deoarece f și g sînt continue pe $[0, 1]$ rezultă că h este continuă pe $[0, 1]$, la fel și derivabilă pe $(0, 1)$. Avem $f(0) = f(1) = 0$ de unde rezultă că $h(0) = h(1) = 0$.

Condițiile teoremei lui Rolle fiind îndeplinite rezultă că există $c_n \in (0, 1)$ astfel încît $h'(c_n) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{g^{n-1}(c_n)[f'(c_n)g(c_n) - ng'(c_n)f(c_n)]}{g^{2n}(c_n)} = 0 \Rightarrow \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = n\cdot\frac{f(c_n)}{g(c_n)}$$

Scanned with OKEN Scanner

68° Deoarece $f(x)$ este o funcție rațională o putem descompune în fracții simple, deci:

$$f(x) = x^3 + x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}.$$

Notînd $g(x) = \frac{1}{x+a}$ se demonstrează prin inducție că

$$g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}.$$

Aplicînd formula pentru $a = -1$ și $a = 1$ rezultă

$$\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} \text{ și } \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}.$$

Pentru $n \geqslant 4$ rezultă că $(x^3+x)^{(n)} = 0$ și atunci

$$f^{(n)})x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

Pentru $n = 1, 2, 3$ se calculează separat $f'(x)$, $f''(x)$ și $f^{(3)}(x)$.

69° Domeniul de definiție: $(-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$.
Asimptote: $x = 0$ și $y = x$ la ramura spre $+\infty$.
Derivata întîi:

$$f'(x) = \frac{2x^3+1}{2x^3}\sqrt{\frac{x}{x^3-1}}$$

Tabloul final:

x	$-\infty$		$-1/2$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	‖	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$3/\sqrt[3]{16}$	$\searrow$	$+\infty$	‖	0	$\nearrow$	$+\infty$

Graficul funcției este prezentat în fig. 17.

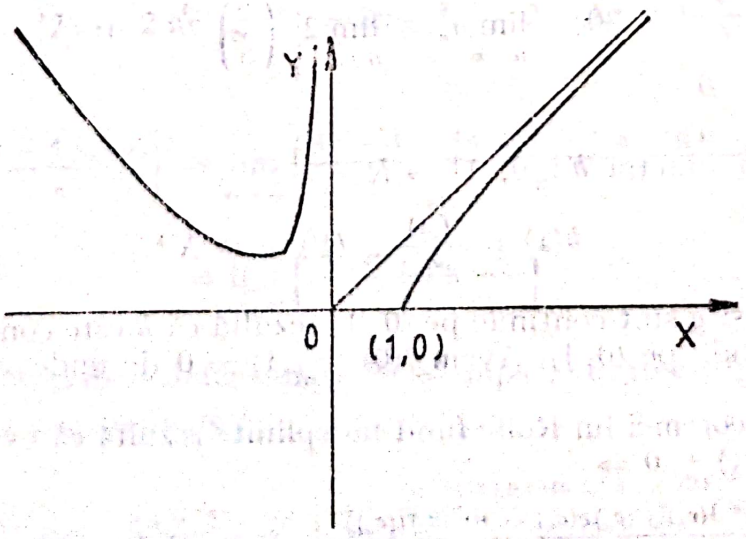


fig. 17

70° $|x-a| = \begin{cases} -x+a & \text{dacă } x \leqslant a \\ x-a & \text{dacă } x > a \end{cases}$

a) Dacă $a \in (-\infty, 1]$ atunci $a \leqslant 1 \leqslant x \leqslant 3$ și deci $|x-a| = x-a$

$$\int_1^3 \frac{dx}{|x-a|+1} = \int_1^3 \frac{dx}{x-a+1} = \ln \frac{4-a}{2-a}$$

b) Dacă $a \in (1, 3]$ atunci :

$$\int_1^3 \frac{dx}{|x-a|+1} = \int_1^a \frac{dx}{|x-a|+1} + \int_a^3 \frac{dx}{|x-a|+1} =$$

$$= \int_1^a \frac{dx}{a-x+1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-a+1} = \ln a(4-a)$$

c) Dacă $a \in (3, +\infty)$ atunci $1 \leqslant x \leqslant 3 < a$ și deci $|x-a| = -x+a$

$$\int_1^3 \frac{dx}{|x-a|+1} = \int_1^3 \frac{dx}{-x+a+1} = \ln \frac{a}{a-2}$$

TESTUL 15

71° Notăm $a_n = \left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) =$

$$= \frac{3^2-2^2}{3^2} \cdot \frac{4^2-2^2}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{n^2-2^2}{n^2} =$$

$$= \frac{(3-2)(3+2)}{3^2} \cdot \frac{(4-2)(4+2)}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-2)(n+2)}{n^2} =$$

$$= \frac{1\cdot 5}{3^2} \cdot \frac{2\cdot 6}{4^2} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-2)(n+2)}{n^2} =$$

$$= \frac{[1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-2)][5\cdot 6\cdot \ldots \cdot n(n+1)(n+2)]}{[3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n][3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot \ldots \cdot n]} =$$

$$= \frac{2(n+1)(n+2)}{12n(n-1)} = \frac{n^2+3n+2}{6n^2-6}.$$

Trecînd la limită obținem :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{6}.$$

72° Fie $x_0 \in R$ un punct arbitrar și două șiruri $(x_n)_{n\geqslant 0}$, $(x'_n)_{n\geqslant 0}$, $x_n \in Q$, $x'_n \in R-Q$, $x_n \to x_0$, $x'_n \to x_0$ $f(x_n) = -x_n^2 + 2 \to -x_0^2 + 2$

Scanned with OKEN Scanner

$$f(x_n') = x_n'^3 \to +x_0^3$$

$$f(x_0) = \begin{cases} -x_0^2 + 2 & \text{dacă } x_0 \in Q \\ x_0^3 & \text{dacă } x_0 \in R - Q. \end{cases}$$

Funcția f este continuă în x_0 dacă :

$$x_0^3 = -x_0^2 + 2 \Leftrightarrow x_0^3 + x_0^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - 1)(x_0^2 + 2x_0 + 2) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$$

Deci funcția f este continuă în 1 și discontinuă pe $R - \{1\}$.

73° Presupunem mai întîi că P se divide cu P'.

Atunci există $a \in R$ și $\lambda_1 \in R - \{0, 1\}$ astfel încît

$$P(x) = \lambda_1(x - a)P'(x) \quad (\forall)\ x \in R \tag{1}$$

Derivînd această relație obținem :

$$P'(x) = \lambda_1 P'(x) + \lambda_1(x - a)P''(x) \quad (\forall)\ x \in R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P'(x) = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_1}(x - a)P''(x) \tag{2}$$

Înlocuind pe $P'(x)$ din relația (2) în relația (1) obținem :

$$P(x) = \frac{\lambda_1^2}{1 - \lambda_1}(x - a)^2 P''(x) \quad (\forall)\ x \in R$$

Notăm $\lambda_2 = \dfrac{\lambda_1^2}{1 - \lambda_1}$ și atunci :

$$P(x) = \lambda_2(x - a)^2 P''(x)$$

Continuînd procedeul rezultă că există $\lambda_n \in R$ astfel încît

$$P(x) = \lambda_n(x - a)^n P^{(n)}(x)$$

Deoarece P este de gradul n rezultă că $P^{(n)}(x) = k \in R$

Atunci $P(x) = k \cdot \lambda_n(x - a)^n = \lambda(x - a)^n$ unde $\lambda = k \cdot \lambda_n$

Reciproc : dacă $P(x) = \lambda(x - a)^n \quad (\forall)\ x \in R \Rightarrow P'(x) = \lambda n(x - a)^{n-1}$ și evident rezultă că P se divide cu P'.

74° Asimptote : $y = 0$

Derivata întîi : $f'(x) = \dfrac{2}{x^3} e^{-1/x^3}$ dacă $x \neq 0$

Tabloul final :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$_0 0_0$	$\nearrow$	1

Graficul funcției este prezentat în fig. 18.

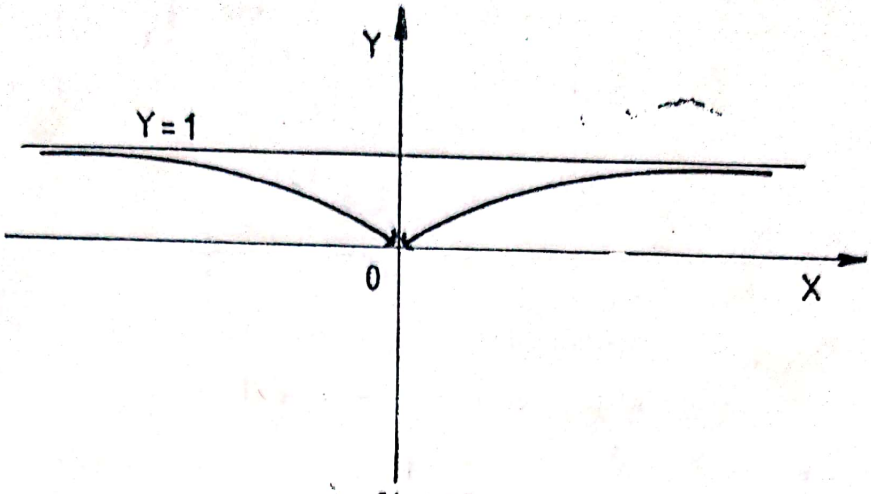


fig. 18

75° Fie $\Delta: 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ și $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$,

$$i = 1, 2, \ldots, n \text{ și } \sigma_\Delta(f, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

a) dacă $\xi_i \in Q \Rightarrow \sigma_\Delta(f,\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) =$

$$= x_n - x_0 = 1 - 0 = 1$$

b) dacă $\xi_i \notin Q \Rightarrow \sigma_\Delta(f, \xi_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2(x_i - x_{i-1}) = 2(x_n - x_0) = 2.$$

Deci f nu este integrabilă Riemann.

TESTUL 16

76° $x_n(1 - x_n) = -x_n^2 + x_n \leqslant \frac{1}{4}$ deoarece $\frac{1}{4}$ este valoarea maximă a funcției de gradul al doilea $f(x) = -x^2 + x$. Avem deci:

$$x_n(1 - x_n) \leqslant \frac{1}{4} < x_{n+1}(1 - x_n) \Rightarrow x_n < x_{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{șirul } (x_n)_{n \geqslant 0} \text{ este crescător.}$$

$$x_n \in (0, 1) \ (\forall) \ n \geqslant 0 \Rightarrow (x_n)_{n \geqslant 0} \text{ este mărginit.}$$

Fiind monoton și mărginit rezultă că $(x_n)_{n \geqslant 0}$ este convergent și deci există $x = \lim_{n \to \infty} x_n$.

Scanned with OKEN Scanner

$x_{n+1}(1-x_n) \geq \frac{1}{4}$ și prin trecere la limită obținem:

$$x(1-x) \geqslant \frac{1}{4} \Rightarrow \left(x-\frac{1}{4}\right)^2 \leqslant 0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}.$$

77° Se urmărește mai întîi explicitatea funcției

$$g(x) = |x - |x-1||$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

Dacă $x \in (-\infty, 1]$ atunci $g(x) = |x + x - 1| = |2x-1|$

Dacă $x \in (1, +\infty)$ atunci $g(x) = |x - x + 1| = 1$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	1	$\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|$	

— Dacă $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ atunci $g(x) = -2x+1$

— Dacă $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ atunci $g(x) = 2x-1$

Deci

$$g(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{dacă } x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \\ 2x-1 & \text{dacă } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \\ 1 & \text{dacă } x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

Vom considera acum funcția $h(x) = g(x) - x =$

$$= \begin{cases} -3x+1 & \text{dacă } x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \\ x-1 & \text{dacă } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \\ 1-x & \text{dacă } x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	$-\frac{1}{2}$	$-$	0	$-$	

Dacă $x \left(-\infty, \frac{1}{3}\right.$ atunci $g(x) - x \geqslant 0 \Rightarrow g(x) \geqslant x \Rightarrow$

$\Rightarrow \max\{g(x), x\} = g(x) = -2x+1$

Dacă $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ atunci $g(x) - x < 0 \Rightarrow g(x) < x \Rightarrow$

$\Rightarrow \max\{g(x), x\} = x$

Scanned with OKEN Scanner

Dacă $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ atunci $g(x) - x \leqslant 0 \Rightarrow g(x) \leqslant x \Rightarrow \max\{g(x), x\} = x$.

Dacă $x \in (1, +\infty)$ atunci $g(x) - x < 0 \Rightarrow g(x) < x \Rightarrow \max\{g(x), x\} = x$.

Deci:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{dacă } x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right] \\ x & \text{dacă } x \in \left(\frac{1}{3}, +\infty\right) \end{cases}$$

și evident f este continuă pe R.

78° $f(x) = \frac{1}{x^2 + x}$.

Asimptote: $x = -1$, $x = 0$, $y = 0$

Derivata întâi: $f'(x) = \frac{-2x - 1}{(x^2 + x)^2}$.

Tabloul final:

x	$-\infty$		-1		$-1/2$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$\cdots$	$+$	$\cdots$	$+$	0	$-$	$\cdots$	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\mid$ $-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$ $\mid$ $+\infty$	$\searrow$	0

Graficul funcției este prezentat în figura 19

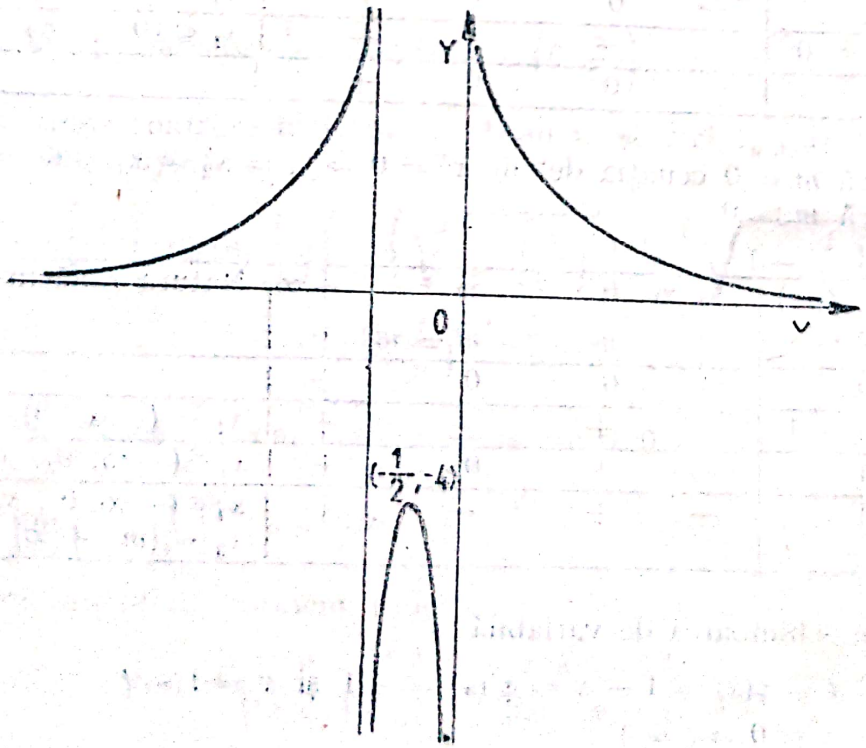


fig. 19

Scanned with OKEN Scanner

$b)\ f(1)+f(2)+\ldots+f(n)=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+$

$$+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

$$\lim_{n\to-\infty}[f(1)+f(2)+\ldots+f(n)]=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

79° Notăm $f(x)=2x^3-3mx^2+m$

$f'(x)=6x^2-6mx$

$f'(x)=0\Rightarrow x_1=0$ și $x_2=m$

$f(0)=m,\ f(m)=m-m^3$

$f(-\infty)=\lim_{n\to-\infty}f(x)=-\infty$

$f(+\infty)=\lim_{n\to\infty}f(x)=+\infty$

a) Dacă $m<0$

m \ $f(m)$	$-\infty$	m	0	$+\infty$	Natura rădăcinilor
	$-$	$m-m^3$	m	$+$	
$m<-1$	$-$	$+$	$-$	$+$	$x_1\in(-\infty, m)$, $x_2\in(m, 0)$ $x_3\in(0, +\infty)$
$m=-1$	$-$	0	$-$	$+$	$x_1=x_2=m$, $x_3\in(0, +\infty)$
$-1<m<0$	$-$	$-$	$-$	$+$	$x_1\in(0, +\infty)$
$m=0$	$-$	0	0	$+$	

b) Dacă $m=0$ ecuația devine $x^3=0\Rightarrow x_1=x_2=x_3=0$

c) Dacă $m>0$

m \ $f(m)$	$-\infty$	0	m	$+\infty$	Natura rădăcinilor
	$-$	m	$m-m^3$	$+$	
$m=0$	$-$	0	0	$+$	
$0<m<1$	$-$	$+$	$+$	$+$	$x_1\in(-\infty, 0)$
$m=1$	$-$	$+$	0	$+$	$x_1\in(-\infty, 0)$, $x_2=x_3=m$
$m<1$	$-$	$+$	$-$	$+$	$x_1\in(-\infty, 0)$, $x_2\in(0, m)$ $x_3\in(m, +\infty)$

80° Facem schimbarea de variabilă :

$t=\varphi(x)=1-x\Rightarrow\varphi'(x)=-1$ și $x=1-t$

$x=0\Rightarrow t=1$

$x=1\Rightarrow t=0$

Scanned with OKEN Scanner

$$\int_0^1 x^n(1-x)^p dx = -\int_0^1 (1-x)' x^n (1-x)^p \, dx =$$

$$= -\int_1^0 (1-t)^n t^p dt = \int_0^1 t^p (1-t)^n dx = \int_0^1 x^p (1-x)^n dx$$

TESTUL 17

81° $L = \lim\limits_{n\to\infty} [\lim\limits_{x\to 0} (1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 2x + \ldots + \operatorname{tg}^2 nx)]^{1/n^3 x^2} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} [\lim\limits_{x\to 0} (1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 2x + \ldots + \operatorname{tg}^2 nx)^{1/x^2}]^{1/n^3}$

Însă $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 2x + \ldots + \operatorname{tg}^2 nx)^{1/x^2} =$

$= \lim\limits_{x\to 0} [(1 + \operatorname{tg}^2 x + \ldots + \operatorname{tg}^2 nx)^{1/(\operatorname{tg}^2 x + \ldots + \operatorname{tg}^2 nx)}]^{(\operatorname{tg}^2 x + \ldots + \operatorname{tg}^2 nx)/x^2} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{tg}^2 x + \ldots + \operatorname{tg}^2 nx)/x^2} = e^{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2} = e^{n(n+1)(2n+1)/6}$

Revenind la limită inițială obținem:

$$L = \lim_{n\to\infty} (e^{n(n+1)(2n+1)/6})^{1/n^3} = \lim_{n\to\infty} e^{n(n+1)(2n+1)/6n^3} = e^{1/3} = \sqrt[3]{e}.$$

82° $f'(x) = n\sin^{n-1} x \cos x$

$f''(x) = n \sin^{n-2} x[(n-1)\cos^2 x - \sin^2 x] = n \sin^{n-2} x(n \cos^2 x - 1)$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x_n = \arccos \frac{1}{\sqrt{n}}$ deoarece $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$f''(x)$ are semne contrare în jurul punctului x_n și deci x_n este punct de inflexiune pentru $f(x)$.

$$y_n = f(x_n) = \left[\sin\left(\arccos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]^n = \left(\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}\right)^n = \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)^n =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n/2}.$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \arccos \frac{1}{\sqrt{n}} = \arccos \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n/2} = e^{-(1/2)}$$

83° Explicitînd modulul, obținem funcția:

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)e^{x-1} & \text{dacă } x < 1 \\ (x+1)e^{1-x} & \text{dacă } x \geq 1 \end{cases}$$

Asimptote: $y = 0$

Derivata întîi:

$$f'(x) = \begin{cases} (x+2)e^{x-1} & \text{dacă } x < 1 \\ -xe^{1-x} & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$

Derivata a doua:

$$f''(x) = \begin{cases} (x+3)e^{x-1} & \text{dacă } x < 1 \\ (x-1)e^{1-x} & \text{dacă } x > 1 \end{cases}$$

Tabloul final:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	$\|$	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-(2/e^4)$	$\searrow$	$-(1/e^2)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1/e$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0
$f''(x)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	$\|$	$+$	

Graficul funcției este prezentat în figura 20.

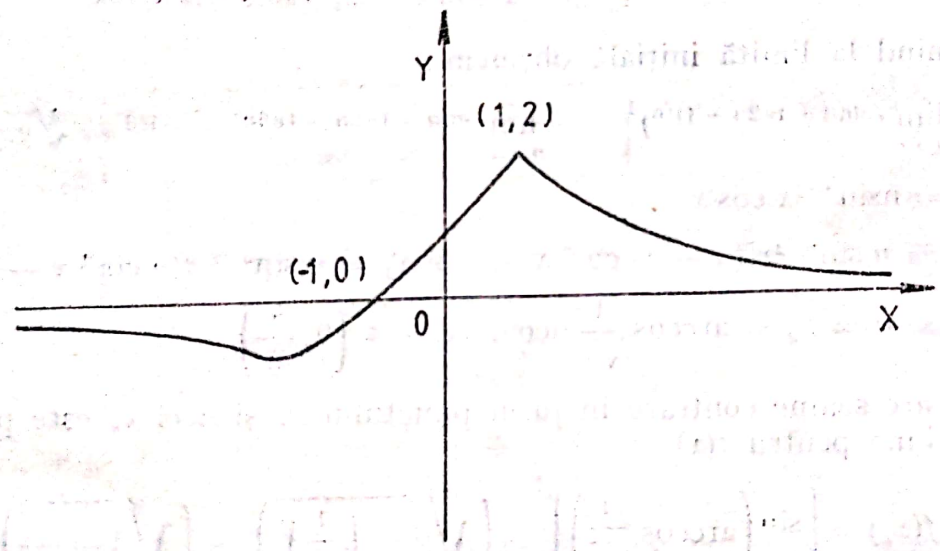


fig. 20

84° $f(0) = 1$ și $f(1) = 3$

Vom considera $\lambda \in (1, 3)$ astfel: $\lambda \in (2, 3) - Q$

Dacă $x \in (0,1) \cap Q$ rezultă $f(x) = x^2 + x + 1 \in Q \Rightarrow f(x) \neq \lambda$

Dacă $x \in (0,1) - Q$ rezultă $f(x) = 2^x < 2 < \lambda \Rightarrow f(x) \neq \lambda$

Rezultă deci că f nu are proprietatea lui Darboux și deci f nu are primitive.

85° Considerăm $f(x) = |x - |x - 2||$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

Dacă $x \in (-\infty, 2]$ atunci $f(x) = |x + x - 2| = |2x - 2|$

Dacă $x \in (2, \infty)$ atunci $f(x) = |x - x + 2| = 2$.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$2x-2$		$-$	0	$+$	0		

Dacă $x \in (-\infty, -1]$ atunci $f(x) = -2x + 2$

Dacă $x \in (-1, 2]$ atunci $f(x) = 2x - 2$.

Deci $f(x) = \begin{cases} -2x + 2 & \text{dacă } x \in (-\infty, -1] \\ 2x - 2 & \text{dacă } x \in (-1, 2] \\ 2 & \text{dacă } x \in (2, +\infty) \end{cases}$

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{-1} f(x)dx + \int_{-1}^{2} f(x)dx = \int_{-2}^{-1} (-2x + 2)dx + \int_{-1}^{2} (2x - 2)dx =$$

$$= (-x^2 + 2x)\Big|_{-2}^{-1} + (x^2 - 2x)\Big|_{-1}^{2} = 2$$

TESTUL 18

86° Calculăm mai întîi: $a_n = \lim\limits_{x \to 0} (1 - x \sin nx)^{1/x^2} =$

$$= \lim_{x \to \infty} [(1 - x \sin nx)^{1/(-x \sin nx)}]^{(-x \sin nx)/x^2} = e^{\lim\limits_{x \to 0} (-\sin nx)/x} = e^{-n}$$

Atunci $b_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = e^{-1} + e^{-2} + \ldots + e^{-n} = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \ldots + \frac{1}{e^n} = \frac{1}{e} \cdot \frac{1 - \frac{1}{e^n}}{1 - \frac{1}{e}}$.

Trecînd la limită și ținînd cont de faptul că $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{e^n} = 0$ obținem $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = \frac{1}{e - 1}$.

87° Impunem condiția de existență a radicalului:

$$cn^2 + bn + 2 \geqslant 0 \quad (\forall)\ n \in N$$

Deoarece $n \to \infty$ va trebui să impunem ca soluția inecuației să fie reuniunea intervalelor din afara rădăcinilor și deci $c \geqslant 0$.

Dacă $c = 0$ atunci impunem condiția $bn + 2 \geqslant 0$ $(\forall)$ $n \in N$ adică $b \geqslant 0$.

a) Dacă $a \geqslant 0$ atunci în mod evident

$$\lim_{n \to \infty} n(an + \sqrt{2 + bn + cn^2}) = +\infty$$

ceea ce nu convine.

Scanned with OKEN Scanner

b) Dacă $a < 0$ amplificăm cu conjugata și obținem :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(cn^2+bn+2-a^2n^2)}{\sqrt{cn^2+bn+2}-an} = \lim \frac{n^3(c-a^2)+bn^2+2n}{n\left[\sqrt{c+\frac{b}{n}+\frac{2}{n^2}}-a\right]}$$

Pentru ca limita să existe și să fie 1 va trebui să impunem următoarele condiții :

$$c - a^2 = 0,\ b = 0 \text{ și } \sqrt{c} - a = 2$$

și deci $a = -1,\ b = 0,\ c = 1.$

88° Avem :

$$\int_1^n \frac{x-1}{x+1}\,dx = \int_1^n \frac{x+1-2}{x+1}\,dx = \int_1^n 1\cdot dx - 2\int_1^n \frac{dx}{x+1} =$$

$$= (x - 2\ln|x+1|)\Big|_1^n = n - 1 - 2\ln(n+1) + 2\ln 2.$$

Calculăm acum :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1-2\ln(n+1)+2\ln 2}{n} = \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{2\ln 2-1}{n}-\frac{2\ln(n+1)}{n}\right]=1.$$

89° Funcția $x \to \ln[x]$ este crescătoare pe $[1, n+1]$ și deci integrabilă.

Dacă $x \in [k, k+1)$ atunci $[x] = k$ și $\ln[x] = \ln k.$

$$\int_1^{n+1} \ln[x]\,dx = \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} \ln[x]\,dx = \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} \ln k\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (\ln k)x\Big|_k^{k+1} = \sum_{k=1}^{n}[(k+1)\ln k - k\ln k] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \ln k = \ln \prod_{k=1}^{n} k = \ln n!$$

90° Notăm : $I = \int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{a+b\sin 2x}}$ și $J = \int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{a+b\sin 2x}}$

$$I + J = \int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{a+b-b(1-\sin 2x)}}\,dx = \int \frac{(\sin x-\cos x)'\,dx}{\sqrt{a+b-b(\sin x-\cos x)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b}}\int \frac{(\sin x-\cos x)'\,dx}{\sqrt{\frac{a+b}{b}-(\sin x-\cos x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\arcsin\left[\sqrt{\frac{b}{a+b}}(\sin x-\cos x)\right]$$

Scanned with OKEN Scanner

$$I - J = \int \frac{(\sin x - \cos x)\,dx}{\sqrt{a - b + b(1 + \sin 2x)}} = -\int \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sqrt{a - b + b(\sin x + \cos x)^2}}\,dx =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{b}} \int \frac{(\sin x + \cos x)'}{\sqrt{\frac{a-b}{b} + (\sin x + \cos x)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{b}} \ln \left| \sin x + \cos x + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{a-b}{b} + (\sin x + \cos x)^2} \right|$$

Adunînd cele două relații obținem :

$$I = \frac{1}{2\sqrt{b}} \left\{ \arcsin \sqrt{\frac{b}{a+b}} (\sin x - \cos x) - \ln \left| \sin x + \cos x + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sqrt{\frac{a-b}{b} + (\sin x + \cos x)^2} \right| \right\} + C$$

TESTUL 19

91° Calculăm mai întîi :

$$\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \cdot \ldots \cdot \cos \frac{x}{2^n} =$$

$$= \frac{\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \cdot \ldots \cdot \cos \frac{x}{2^{n-1}} \cdot 2 \sin \frac{x}{2^n} \cos \frac{x}{2^n}}{2 \sin \frac{x}{2^n}} =$$

$$= \frac{\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \cdot \ldots \cdot \cos \frac{x}{2^{n-1}} \cdot \sin \frac{x}{2^{n-1}}}{2 \sin \frac{x}{2^n}} =$$

$$\frac{\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \cdot \ldots \cdot \sin \frac{x}{2^{n-2}}}{2^2 \sin \frac{x}{2^n}} = \ldots = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$$

Trecînd la limită după n și apoi după x obținem :

$$I = \lim_{x \to 0} \lim_{n \to 0} \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \lim_{x \to 0} \lim_{n \to \infty} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} = 1$$

Scanned with OKEN Scanner

92° Dacă $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ atunci $f(x) = \frac{1}{x^2} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}$ și este continuă fiind compunere de funcții elementare.

Dacă $x \in (-1, 1)$ atunci $f(x) = \frac{1}{x^2} \ln \frac{1-x^2}{x^2+1}$ și este continuă fiind compunere de funcții elementare.

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} \frac{1}{x^2} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1} = -\infty$$

Deci funcția f nu este continuă în $x = -1$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{x^2} \ln \frac{1-x^2}{1+x^2} = -\infty$$

Observăm că la stînga și la dreapta lui 0 funcția este la fel definită și deci limitele laterale sînt egale. Vom calcula deci:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{1-x^2}{1+x^2} = \lim_{x\to 0} \ln \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^{1/x^2} =$$

$$= \ln \left[\lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{-2x^2}{1+x^2}\right)^{(1+x^2)/(-2x^2)}\right]^{[-2x^2/(1+x^2)]\cdot(1/x^2)} = \ln e^{\lim\limits_{x\to 0} -2/(1+x^2)} =$$

$$= \ln e^{-2} = -2$$

$f(0) = -2$ și deci funcția f este continuă în 0.

Dacă $x \in [\sqrt{3}, 2]$ atunci $f(x) = \frac{1}{x^2} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}$ și deci

$$I = \int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{1}{x^2} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}\, dx = -\int_{\sqrt{3}}^{2} \left(\frac{1}{x}\right)' \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{x} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}\Bigg|_{\sqrt{3}}^{2} + \int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{1}{x} \left(\ln \frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' dx = -\frac{1}{2} \ln \frac{3}{5} + \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{1}{2} +$$

$$+ \int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{1}{x} \cdot \frac{4x}{x^4-1}\, dx = -\frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln 5 - \frac{1}{\sqrt{3}} \ln 2 + 4 \int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{dx}{x^4-1} =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{2} \ln 5 - \frac{1}{\sqrt{3}} \ln 2 + 2 \left(\int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{dx}{x^2-1} + \int_{\sqrt{3}}^{2} \frac{dx}{x^2+1} \right) = \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} \ln 5 - \frac{3}{2} \ln 3 - \frac{1}{\sqrt{3}} \ln 2 + \frac{2\pi}{3} - \ln(2-\sqrt{3}) - 2 \operatorname{arctg} 2.$$

Scanned with OKEN Scanner

93° Fie funcțiile :

$$g : R \to R \qquad g(x) = xf(x+1)$$
$$h : R \to R \qquad g(x) = (x+1)f(x)$$
$$u : R \to R \qquad u(x) = (x-1)f(x)$$

Din ipoteză funcțiile g și h au primitive.
Funcția u se obține din funcția g prin înlocuirea lui x cu $x-1$ și deci funcția u are primitive.
Deoarece $f(x) = \frac{1}{2}(g(x) - u(x))$ rezultă că funcția f are primitive.

94° Inegalitatea din enunț este echivalentă cu

$$\int_0^1 [e^{x^2} + e^{1-x^2}]\,dx \leqslant 1 + e$$

Considerăm funcția $f : [0, 1] \to R$,

$$f(x) = e^{x^2} + e^{1-x^2}$$
$$f'(x) = 2xe^{x^2} - 2xe^{1-x^2} = 2x(e^{x^2} - e^{1-x^2})$$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1		$+\infty$
$f'(x)$			0	$-$	0	$+$	$e-1$		
$f(x)$			$1+e$	$\searrow$	$2e$	$\nearrow$	$e+1$		

Din tabloul de variație rezultă că

$f(x) \leqslant 1 + e$ $(\forall)$ $x \in [0, 1]$ și deci

$$\int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \int_0^1 (1+e)\,dx = 1 + e$$

95° $I_n = \int \frac{2x \cdot x^{n-1}}{2\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int (\sqrt{x^2+1})' x^{n-1}\,dx = \sqrt{x^2+1}x^{n-1} -$

$$-\int (n-1)x^{n-2}\sqrt{x^2+1}\,dx = \sqrt{x^2+1}\cdot x^{n-1} - (n-1)\int \frac{x^{n-2}(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}dx =$$

$$= \sqrt{x^2+1}\cdot x^{n-1} - (n-1)\left(\int \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}\,dx + \int \frac{x^{n-2}}{\sqrt{x^2+1}}\,dx\right) =$$

$$= \sqrt{x^2+1}\,x^{n-1} - (n-1)I_n - (n-1)I_{n-2}$$

Deci $I_n = x^{n-1}\sqrt{x^2+1} - (n-1)I_n - (n-1)I_{n-2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow nI_n = x^{n-1}\sqrt{x^2+1} - (n-1)I_{n-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{x^{n-1}}{n}\sqrt{x^2+1} - \frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

Scanned with OKEN Scanner

TESTUL 20

96° $x_{n+1} - x_n = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^n} + \frac{1}{(n+1)^{n+1}}\right) -$

$$-\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^n}\right) = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} > 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_n < x_{n+1}$ $(\forall)$ $n \in N \Rightarrow$ șirul $(x_n)_{n\geqslant 1}$ este monoton.

Dacă $k \geqslant 2$ atunci $k^k \geqslant 2^k$ de unde rezultă că $\frac{1}{k^k} \leqslant \frac{1}{2^k}$.

Atunci:

$$x_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n} \leqslant 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^n} < 2$$

Deci $x_n \in (1, 2)$ $(\forall)$ $n \in N$ fiind astfel mărginit.
Fiind monoton și mărginit rezultă că șirul este convergent.

97° Putem explicita funcția $g(x)$, astfel:

$$g(x) = \begin{cases} (n-1)f(x) & \text{dacă } n - 1 \leqslant x < n \\ nf(x) & \text{dacă } n \leqslant x < n + 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \nearrow n} g(x) = \lim_{x \nearrow n} (n-1)f(x) = (n-1)f(n)$$

$$\lim_{x \searrow n} g(x) = \lim_{x \searrow n} nf(x) = nf(n)$$

g este continuă în $n \in Z \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \nearrow n} g(x) = \lim_{x \searrow n} g(x) \Leftrightarrow (n-1)f(n) = nf(n) \Leftrightarrow f(n) = 0$$

98° Funcția $x \to x \arccos \frac{1}{x}$ este continuă pe $[1, 2]$ de unde rezultă că este integrabilă pe $[1, 2]$ și

$$\int_1^2 x \arccos\frac{1}{x}\, dx = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}\right)' \arccos\frac{1}{x}\, dx = \frac{x^2}{2} \arccos\frac{1}{x}\Bigg|_1^2 -$$

$$-\int_1^2 \frac{x^2}{2}\left(\arccos\frac{1}{x}\right)' dx = \frac{2\pi}{3} - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\, dx =$$

$$= \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2}\lim_{\substack{\alpha \to 1 \\ \alpha > 1}} \int_\alpha^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\, dx =$$

Scanned with OKEN Scanner

$$= \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2} \lim_{\substack{\alpha \to 1 \\ \alpha > 1}} \sqrt{x^2 - 1} \Big|_{\alpha}^{2} = \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2} \lim_{\substack{\alpha \to 1 \\ \alpha > 1}} (\sqrt{3} - \sqrt{\alpha^2 - 1}) =$$

$$= \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

99° Fie $f(x) = e^x - x - 1$, $x \in R$ $f'(x) = e^x - 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	$--$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Din tabloul de variație se observă că f are valoarea cea mai mică 0 și deci $f(x) \geqslant 0$ $(\forall)$ $x \in R \Rightarrow e^x \geqslant x + 1$ $(\forall)$ $x \in R$.

Aplicînd inegalitatea demonstrată pentru x^2 obținem:

$$e^{x^2} \geqslant 1 + x^2 \Rightarrow e^{-x^2} \leqslant \frac{1}{1 + x^2} \quad (\forall) \ x \in R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Dacă $x \in [0, 1]$ atunci $x \geqslant x^2 \Rightarrow -x \leqslant -x^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow e^{-x} \leqslant e^{-x^2} \Rightarrow \int_0^1 e^{-x}\,dx \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

Însă $\frac{1}{e} < 1 - \frac{1}{e}$ și atunci putem scrie:

$$\frac{1}{e} < 1 - \frac{1}{e} = \int_0^1 e^{-x}\,dx \leqslant \int_0^1 e^{-x}\,dx \Rightarrow \frac{1}{e} \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dx$$

100° f este evident crescătoare pe $[-1, 1]$ și deci integrabilă pe $[-1, 1]$ și

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} 0\,dx +$$

$$+ \int_0^1 2dx = 2x \Big|_0^1 = 2$$

Observăm acum că $f([-1, 1]) = \{0, 2\}$ care este mulțime discretă $\Rightarrow f$ nu are proprietatea lui Darboux $\Rightarrow f$ nu admite primitive pe $[-1, 1]$.

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1° D. M. BATINEȚU, I. V. MAFTEI, I. M. STANCU-MINASIAN, Exerciții și probleme de analiză matematică, Ed. didactică și pedagogică București, 1981.

2° C. IONESCU-ȚIU, LIVIU PIRSAN, Calcul diferențial și integral pentru admitere la facultate, Ed. Albatros, București, 1975.

3° CĂTĂLIN PETRE NICOLESCU, Teste de analiză matematică, Ed. Albatros, București, 1984.

4° GH. SABAC, V. OLARU, O. STĂNĂȘILĂ, Probleme de matematică fizică și chimie date la concursurile de admitere în învățământul superior în anii 1978—1979, Ed. didactică și pedagogică București, 1980.

5° ION CUCULESCU, OCTAVIAN STĂNĂȘILĂ, VASILE BRÎNZĂNESCU, CONSTANTIN-IONESCU-BUJOR, Culegere de probleme rezolvate pentru admiterea în învățământul superior, Ed. științifică și enciclopedică, București, 1984.

Scanned with OKEN Scanner